Ein Beitrag

zur

geometrischen und algebraischen Auflösung

der

cubischen Gleichungen

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

von

Alfred Siebel.

Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Georg-Augusts-Universität in Göttingen.

Düsseldorf,
Hof-Buchdruckerei von Voss & Comp.
1866.

Ein Beitrag

zur

geometrischen und algebraischen Auflösung

der

cubischen Gleichungen

von

Alfred Siebel.

Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Georg-Augusts-Universität in Göttingen.

Düsseldorf,

Hof-Buchdruckerei von Voss & Comp.

1866.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0075

A. Construction der Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - (b + c)\,x^2 + b\,(2c - d)\,x - b\,(c - d)\,e = 0, \\ \text{wo} \quad 0 < b < e. \end{array}\right\} \text{(B)*)}$$

§. 1.

Geometrische Aufgabe.

Es seien zwei unbegrenzte Geraden X′X und Z′Z, auf der ersteren ein Punkt d und ausserhalb derselben ein Punkt p gegeben: Die beiden Punkte durch einen rechtwinkeligen Linienzug p x z d zu verbinden, dessen mittlere Ecken auf jenen Geraden liegen.

Um Wiederholungen zu vermeiden, bezeichnen wir im Voraus mit:

w den Winkel X c Z der gegebenen Geraden X′ X und Z′ Z,

c „ Durchschnitt derselben,

$\binom{d}{p}$ „ $\binom{\text{auf}}{\text{ausserh.}}$ X′ X gegebenen Punkt,

$\binom{o}{e}$ „ Durchschnittsp. d. durch p zu Z′ Z $\binom{\text{Parallelen}}{\text{Senkrechten}}$ mit X′X,

$\binom{b}{f}$ „ Fusspunkt des Lothes von p auf $\binom{X'X}{Z'Z}$,

a die Mitte von b c,

$\binom{h_{\prime}}{h_{\prime\prime}}$ d. Durchschn. d. $\binom{\text{inneren}}{\text{äusseren}}$ Halbirungsl. v. o p & b p m. X′X,

q einen beliebigen Punkt auf X′ X,

r denjenigen Punkt von Z′ Z, für welchen $\sphericalangle$ p q r = 90°,

s einen „ „ X′X, „ „ $\sphericalangle$ q r s = 90°,

x „ „ „ „ „ „ s mit d zus. fällt,

z den zu x gehörigen Punkt r,

$\binom{q', r', s';\ q'', r'', s''}{q_{\prime}, r_{\prime}, s_{\prime};\ q_{\prime\prime}, r_{\prime\prime}, s_{\prime\prime}}$ diej. P. q, r, s, f. w. d. Kreis d. $\binom{p\,q\,r}{q\,r\,s}$ d. $\binom{X'X}{Z'Z}$ berührt.

---

*) Der Fall $e < b < 0$ lässt sich auf den obigen durch Vertauschung von $-\infty$ und $+\infty$ zurückführen.

Die, Punkten von $X'X$ entsprechenden Buchstaben mögen zugleich die algebraischen Abstände jener von o — oX positiv genommen — bezeichnen, sodass:

$$\binom{q'}{q''} = e \mp \sqrt{(e-b)(e-c)}$$

und:

$$\binom{q_{\prime}}{q_{\prime\prime}} = e \mp \sqrt{e(e-b)} = \binom{h_{\prime}}{h_{\prime\prime}}.$$

Anmerkung: Aus dem sich hauptsächlich mit der Construction der (positiven) „Wurzeln" der cubischen Gleichungen befassenden Werke: L'Algèbre d'Omar Alkhagyâmî, publiée... par F. Woepcke, docteur..., Paris 1851." entnehmen wir in Bezug auf die vorstehende Aufgabe Folgendes (S. d. Einleitung sowie S. 2 u. S. 93 u. f.):

Plato reducirt auf dieselbe das Problem „zu zwei Geraden zwei mittlere Proportionallinien zu bestimmen." Seine Construction ist eine mechanische. — In ähnlicher Weise theilt ein arab. Math. eine Gerade so in zwei Abschnitte, dass sich das Quadrat des einen Abschnitts zu einem gegebenen Quadrat verhält wie eine gegebene Gerade zu dem andern. In dieser Theilung findet, wie Archimedes gezeigt hat, die Aufg. „Eine Kugel durch eine Ebene so zu theilen, dass sich die Inhalte der Segmente wie zwei gegebene Geraden verhalten" ihre Lösung.

Wir werden sehen, dass sich auf die obige Aufgabe die Construction der Wurzeln einer beliebig vorgelegten cubischen Gleichung zurückführen lässt. (§. 4, §. 30.)

§. 2.

Algebraische Auflösung der Aufgabe des §. 1.

Nehmen wir $X'oX$ und $Y'opY \parallel Z'Z$ als Coordinatenachsen an, so haben wir mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken in $X'X$ (Fig. 2.):

$$qr^2 = cq^2 + cr^2 - 2 \,.\, cq \,.\, cr \,.\, \cos\omega,$$
$$sr^2 = cs^2 + cr^2 - 2 \,.\, cs \,.\, cr \,.\, \cos\omega,$$
$$qs^2 = qr^2 + sr^2 \qquad \text{und:}$$
$$qc^2 + cs^2 + 2 \,.\, qc \,.\, cs = qs^2.$$

durch Addition folgt:

$$2 \,.\, qc \,.\, cs = 2 \,.\, cr^2 - 2 \,.\, cr \,.\, \cos\omega \,.\, (cq + cs), \qquad \text{oder:}$$

1) $$cr^2 - qc \,.\, cs - cr \,.\, \cos\omega \,.\, (cq + cs) = 0.$$

Wegen $pq \parallel rs$ ist:

$$op : oq = cr : cs, \qquad \text{also:}$$

2) $$oq \,.\, cr = op \,.\, cs.$$

Aus 1) und 2) resultirt:

$$cs\,[op^2 \,.\, cs - oq^2 \,.\, qc - oq \,.\, op \,.\, \cos\omega \,.\, (cq + cs)] = 0,$$
$$p^2\,(s - c) + q^2\,(q - c) - q \,.\, b\,(q + s - 2c) = 0, \qquad \text{oder:}$$

3) $$q^3 - (b + c)\,q^2 + b\,(2c - s)\,q - b\,(c - s)\,e = 0,$$

welche Relation auch für $s = c$ gültig ist.

Dieselbe gibt, s = d gesetzt:

$$x^3 - (b + c)x^2 + b(2c - d)x - b(c - d)e = 0.$$

Die Aufgabe lässt also ($\frac{1}{3}$) Lösungen zu [§. 28 (1)].

§. 3.

Geometrische Auflösungen der Aufgabe des §. 1.

1. Auflösung (Fig. 1):

Construire für d als Pol die Fusspunktlinie derjenigen Parabel, deren Scheiteltangente X′X und Brennpunkt p ist, und bestimme die Durchschnitte t dieses Ortes mit Z′Z.

Diese Curve ist vom dritten Grade. Sie bildet in d eine, die besagte Parabel berührende, Schleife und besitzt in der Leitlinie derselben eine Asymptote, längs welcher sie sich auf verschiedenen Seiten und nach entgeggs. Richtungen ins Unendliche erstreckt. [Beides lässt sich leicht geometrisch beweisen.]

2. Auflösung (Fig. 2):

Construire den Ort der vierten Ecke t desjenigen veränderlichen Rechtecks, das sich mit der ersten Ecke um p dreht, mit der zweiten und dritten bezüglich auf X′X & Z′Z fortrückt,

bestimme die Durchschnitte des Ortes (t) mit dem über p d als Durchmesser beschriebenen Kreise und von den jenen entsprechenden Rechtecken die Seiten: tdz, zx, xp.

Der Ort (t) lässt sich in verschiedener Weise construiren*):

1. Modification:

Beschreibe durch p und f eine Schaar von Kreisen (m_1), (m_2)... und verzeichne auf jedem die zu den Schnittpunkten q_1, q_2... mit X′X diametral gelegenen Punkte t_1, t_2...

2. Modification (p. aussh. Z′Z):

Markire auf X′X eine Reihe von Punkten: q_1, q_2... und lege in p und f die rechten Winkel $q_1 p t_1$, $q_1 f t_1$; $q_2 p t_2$, $q_2 f t_2$... an.

Diese Entstehungsweise der Curve (t) lässt zugleich die Natur derselben erkennen.

Sehen wir nämlich X′X als Träger einer Punktreihe q_1, q_2 ... an, so besteht unsere Construction darin, dass wir zwei zu diesen perspectivisch liegende Strahlbüschel mit den Mittelpunkten p und f bilden, diese Büschel gleichsam um 90° drehen und die Durchschnitte je zweier entsprechender Strahlen aufsuchen.

Der vorliegende Ort (t) ist also der Durchschnitt zweier projectivischer Strahlbüschel, mithin eine durch p und f, ihre Mittelpunkte, gehende Curve zweiten Grades und zwar:

---

*) Aus dem Folgenden ergeben sich einige Hyperbel- und Parabelconstructionen.

1) wenn $\sphericalangle$ X c Z $\gtrless$ 90°:

eine Hyperbel, deren eine Asymptote parallel zu Z' Z und deren andere senkrecht gegen X' X ist. Die Hauptachse ist parallel der inneren, äusseren Halbirungslinie des Winkels bei p in dem Dreieck o p b wenn p und f auf gleicher, entgegenges. Seite von X' X liegen.

2) wenn $\sphericalangle$ X c Z = 90°:

eine Parabel, deren Achse auf X' X senkrecht steht.
Hieraus ergibt sich eine

3. Modification.

1) Ist: $\sphericalangle$ X c Z $\gtrless$ 90°,

so bestimmen wir die $h_{,}$ und $h_{,,}$ zugehörigen Punkte $t_{,}$ und $t_{,,}$ (Modif. 2.), errichten in den Mitten von p $t_{,}$ und p $t_{,,}$ die sich in M schneidenden Senkrechten, ziehen durch M eine Gerade parallel zu Z' Z und eine andere senkrecht gegen X' X und construiren zu diesen Geraden als Asymptoten eine durch p (&. f) gehende Hyperbel.

Liegt p auf Z' Z, so $t_{,}$, $t_{,,}$ auf p $h_{,,}$, p $h_{,}$ in demselben Abstand von p wie der Durchschnitt der durch $h_{,}$, $h_{,,}$ zu Z' Z Parallelen.

2) Ist: $\sphericalangle$ X c Z = 90°,

so construiren wir die Parabel, deren Achse in der Mitte a von b c zu X' X senkrecht steht, welche durch p und die auf X' X von a im Abstande a p gelegenen Punkten geht.

§. 4.

Construction der Wurzeln der Gleichung (B).

Verzeichne auf einer Abcissenachse X' o X die Punkte b, c, d, e mit den gleichnamigen Abscissen, den Durchschnitt p des über o e beschriebenen Halbkreises mit der in b auf X' X errichteten Normalen und nach §. 3. die Punkte x und z auf X' X und Z' Z so, dass p x und d z senkrecht zu x z stehen, so ist o x = x eine Wurzel von (B). Diese Construction liefert jede reelle Wurzel (Vgl. §. 2, 3).

Directe Ableitung: Die Gleichung (B) lässt sich auf die Form:

$$x(x - b)(x - d) + (d - c)[x^2 - 2bx + be] = 0, \quad \text{oder:}$$

$$x(x - b)(x - d) + (d - c)[(x - b)^2 + b(e - b)] = 0$$

bringen — Denken wir uns die Grössen b, c, d, e, x auf einer Geraden X' o X als Abscissen abgetragen, die Endpunkte mit den gleichnamigen Buchstaben und den Durchschnitt des über o e stehenden Halbkreises mit dem Lothe in b durch p bezeichnet, so können wir der letzten Gleichung die Fassung:

$$\frac{xb}{xp} \cdot dx = \frac{cd}{ox} \cdot xp$$

geben, welche ausdrückt, dass die Ecke z des bei z rechtwinkligen Dreiecks x z d, dessen Seite d z || p x ist, auf der durch c zu o p Parallelen liegt. (W. z. b.)

B. Kriterien zur Construction der Wurzeln der Gleichung (B).

§. 5.

Eintheilung, Hülfssätze.

I. Die Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - (b + c)\,x^2 + b\,(2\,c - d)\,x - b\,(c - d)\,e = 0, \\ \text{wo} \quad 0 < b < e. \end{array}\right\}\ldots(B)$$

theilen wir je nach der Lage von c zu 0, b und e in folgende Hauptgruppen ein:

$\binom{B}{1} = (c\ 0\ b\ e)$, bis:

$\binom{B}{4} = (0\ b\ e\ c)$;

jede derselben wieder, den Lagen von d entsprechend, in fünf Unterabtheilungen:

$\binom{B}{11} = (d\ c\ 0\ b\ e)$, bis:

$\binom{B}{45} = (0\ b\ e\ c\ d)$.

II. Zur Ableitung von Kriterien in Betreff der Lage der Wurzeln der vorstehenden Gleichungen fassen wir folgende Beziehungen ins Auge:

1) Wird eine Gerade von zwei Transversalen durchschnitten, so ist auf derselben, entggs. Seite ihres Schnittpunktes ein äusserer Winkel grösser, kleiner als sein innerer Gegenwinkel.

2) Die von einem Punkte ausserh., auf, innerh. der Peripherie eines Kreises nach zwei diametralliegenden Punkten derselben gezogenen Verbindungslinien schliessen einen Winkel ein, der $(\lesseqgtr)\ 90^0$ ist.

3) Bewegt sich eine Gerade von veränderlicher Länge mit ihren Endpunkten p und q auf den Schenkeln eines Winkels X c Z der Art, dass c p und ∢ c p q zu, abnehmen, so nimmt auch c q zu, ab.

4) Einem Punkte r (§. 1) entsprechen $\binom{0}{2}$ Punkte q
» » s » $\binom{1}{3}$ » »

5) Mit q bewegen sich r und s stetig.

6) Fällt q mit x, so s mit d zusammen.

7) Für die Gruppe $\binom{B}{4}$ [S. Fig. 6] bemerken wir in Betreff des Intervalls (e c), dass sich eine Figur herstellen lässt, in der zwei Punkten q, q_1 in (e c) ein und dasselbe s entspricht*), dass der parallel zu r q gemessene Abstand des Punktes q, von

s r und mithin auch s von p q, kleiner als r q ist, s also auf der negativen Seite desjenigen Punktes l liegt, für den $\sphericalangle$ c p l $= 90^0$, dessen Abscisse daher $l = \left(\frac{c-e}{c-b}\right) b$ ist.

Mittelst 1) bestimmen wir zunächst für Punkte q in den durch o, b, e und c gebildeten fünf Intervallen, für die Fälle $\binom{B}{1} .. \binom{B}{4}$ [Fig. 3 u. f.] auf welcher Seite von X′ X, Z′ Z, das zugehörige r, s liegt, und mit Bedacht auf 2) ob sich r zwischen c und r′ oder zwischen r″ und Z befindet, oder jede Lage in $\binom{(Z'\,c)}{(c\;Z)}$ annehmen kann.

*) Anmerkung. Dreht sich ein Strahl X′ s X um einen festen Punkt s, so beschreibt der Durchschnitt p der in den Schnittpunkten q, q_1 desselben mit zwei festen Geraden r t, r_1 t auf diesen errichteten Normalen eine Hyperbel, deren Asymptoten auf jenen Geraden senkrecht stehen. (Der Ort von p ist der Durchschnitt zweier projectivischer Parallelstrahlenbüschel). Diejenigen Strahlen, in denen q und q_1 auf $\binom{\text{derselben,}}{\text{entggs}}$ Seite von s liegen, liefern Punkte p eines und desselben Zweiges.

§. 6.

Lagenverhältnisse von q, r und s.

(B)	Zusammengehörige Intervalle für		
	q	r	s
$\binom{B}{1}$	X′c	Z′c	cX
	co	c r′	X′c
	ob	„	cq
	be	„	„
	eX	r″ z	qX
$\binom{B}{2}$	X′o	„	„
	oc	„	qc
	cb	„	„
	be	„	„
	eX	„	„
$\binom{B}{3}$	X′o	„	„
	ob	„	„
	bc	„	„
	ce	„	„
	eX	„	„
$\binom{B}{4}$	X′o	„	„
	ob	„	„
	be	cz	„
	ec	„	X′q
	cX	„	„

Bezeichnen wir mit $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$ diejenigen Punkte für welche o s, als Function von o q aufgefasst, ein Maximum oder Minimum wird*), so ergeben sich m. Rücks. darauf dass nach Vorstehendem in den Fällen $\binom{B}{1}$, $\binom{B}{2}$ & $\binom{B}{3}$ für Punkte q bezüglich zwischen 0 & c, 0 & b und 0 & c: r in (c r') und für solche zwischen e & ∞: r in (r'' Z) liegt; und wegen §. 5 II. $\binom{!}{?}$ in Betreff der Lage von $q_{,}$, $q_{,,}$ & $q_{,,,}$ zu $\binom{q',\ q''}{q_{,},\ q_{,,}}$ folgende

Lagenverhältnisse für $q_{,}$, $q_{,,}$ und $q_{,,,}$.

$\binom{B}{1}$	∞	c	$q_{,}$	q'	0	$q_{,}$	$q_{,,}$	b	e	$q_{,,,}$	$q_{,,}$	q''	∞
	»	»	$q_{,}$	0	q'	»	$q_{,,}$	»	»	$q_{,,,}$	»	»	»
$\binom{B}{2}$	»	0	$q_{,}$	$q_{,}$	c	q'	$q_{,,}$	»	»	$q_{,,,}$	q''	$q_{,,}$	»
	»	»	$q_{,}$	c	$q_{,}$	»	$q_{,,}$	»	»	$q_{,,,}$	»	»	»
$\binom{B}{3}$	»	»	$q_{,}$	$q_{,}$	b	»	$q_{,,}$	c	»	$q_{,,,}$	»	»	»
$\binom{B}{4}$	»	»	$q_{,}$	»	»	e	$q_{,,}$	$q_{,,,}$	c	∞			
	»	»	$q_{,}$	»	»	»	c	∞					

---

*) Die Relation zwischen q und s (§. 2. 3.):

$$q^3 - (b + c)\, q^2 + b\,(2\,c - s)\, q - b\,(c - s)\, e = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

gibt:

$$\frac{d\,s}{d\,q} = \frac{3\,q^2 - 2\,(b + c)\, q + 2\,b\,c - b\,s}{b\,(q - e)}.$$

Somit sind $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$ die Wurzeln der durch Elimination von s aus (1) und:

$$3\,q^2 - 2\,(b + c)\, q + 2\,b\,c - b\,s = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

resultirenden Gleichung:

$$f(q) = 2\,q^3 - (b + c + 3\,e)\, q^2 + 2\,(b + c)\, e\, q - b\,c\,e = 0 \;\ldots\; (3)$$

In der obigen Zusammenstellung haben wir nebenbei Kriterien für die Gleichung (3). – Dieselben ergeben sich auch mittelst der Functionswerthe:

$$f(0) = -\,b\,c\,e,$$
$$f(e) = -\,e\,(e - b)\,(e - c),$$
$$f(b) = b\,(b - c)\,(b - e),$$
$$f(c) = c\,(c - b)\,(c - e),$$
$$f\binom{q_{,}}{q_{,,}} = e\,(e - b)\left[\mp 2\sqrt{e\,(e - b)} + 2\,e - b\right] \gtrless 0 \qquad \text{und:}$$
$$f\binom{q'}{q''} = (e - b)\,(e - c)\left[\mp 2\sqrt{(e - b)\,(e - c)} + 2\,e - (b + c)\right] \gtrless 0.$$

Jene Kriterien zeigen, dass wenn $0 < b < e$ & $c < e$ jede Wurzel von (3) reell ist.

Anmerkung: Die für s gefundenen Beziehungen folgen auch direct aus der zwischen s und q bestehenden Relation §. 2, 3) wonach:

$$q(q-b)(q-c)+b(c-s)(q-e)=0 \qquad \text{und}$$

$$q(q-b)(q-s)+(s-c)[q^2-2bq+be]=0;$$

mithin:

$$s-c=\frac{(q-0)(q-b)(q-c)}{b(q-e)} \qquad \text{und}$$

$$s-q=\frac{(q-c)[q^2-2bq+be]}{b(q-e)};$$

also, s und q als Veränderliche angesehen,

s über $\binom{c}{q}$ geht wenn q die Werthe $\begin{pmatrix}0, & b, & e, & c\\ & e, & c & \end{pmatrix}$ überschreitet.

§. 7.

Bewegungsverhältnisse von q, r und s.

Mit Hülfe des vorigen §. und der Bemerkungen in §. 5 II. können wir leicht entscheiden, welcher Art die Bewegungen von r und s sind, wenn q der Reihe nach die durch o, b, e, c bestimmten Intervalle durchläuft*).

Dasselbe findet statt, wenn $b < 0 < e$ & $c < e$.

(3) wird identisch mit:

$$q^3-\alpha q^2+\beta q-\gamma=0,$$

wenn wir setzen:

$$2a=b+c,$$

$$2\alpha=2a+3e,$$

$$3\beta=2a.3e \qquad \text{und}$$

$$\frac{6\gamma}{3e}=bc,$$

also:

$$2a=\alpha\mp\sqrt{\lambda},$$

$$3e=\alpha\pm\sqrt{\lambda},$$

$$\binom{b}{c}=\frac{2a}{2}\mp\tfrac{1}{2}\left(\frac{2a\beta-8\gamma}{e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo $\lambda=\alpha^2-3\beta$.

*) $s_{,}$, $s_{,,}$, $s_{,,}$ entsprechen $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$ (§. 6)

Im Fall	Interv. von q. Bewegung im + Sinne.	I. Bewegung in ders. Richtung im +, — Sinne.		II. Hin- u. Hergang im ±, ∓ Sinne.		III. Comb. Bewegung aus I. und II.	
(B)	q	r	s	r	s	r	s
$\binom{B}{1}$	X′ c	Z′ c	. . . X c				
	c 0	c r_0	. . . . .	. . . .	. . , c $\mathfrak{s}_1$	. c r_0 r′ r_0	
	0 b . . .	. . . r_0 c	. . . . .	. . . .	c $\mathfrak{s}_{,,}$ . . .	. r_0 r′ r_0 c	
	b e . .	. . . c Z′	. . c X′				
	e X .	. . . .	. . . . .	. . . Z r″	. . X $\mathfrak{s}_{,,,}$		
$\binom{B}{2}$	X′ 0	Z′ r_0 . . .	. . . X c				
	0 c	r_0 c	. . . . .	. . . .	. . c $\mathfrak{s}_1$		
	c b . . .	. . . .	. . . . .	c r′ . . .	„ . . .		
	b e . .	. . . „	. . c X′				
	e X .	. . . .	. . . . .	. . . „	. . X $\mathfrak{s}_{,,}$		
$\binom{B}{3}$	X′ 0	Z′ r_0 . . .	. . X c				
	0 b	r_0 c	. . . . .	. . . .	. . . c $\mathfrak{s}_{,}$		
	b c . . .	. . . .	. . . . .	„ . . .	„ . . .		
	c e . .	. . . „	. . c X′				
	e X .	. . . .	. . . . .	. . . „	. . X $\mathfrak{s}_{,,,}$		
$\binom{B}{4}$	X′ 0	Z′ r_0 . . .	. . X c				
	0 b	r_0 c	. . . . .	. . . .	. . . c $\mathfrak{s}_1$		
	b e . . .	c Z	c X . .				
	e c . .	Z′ c	X′ c . .	. . . .	. . . . .	. . . .	X′$\overline{\mathfrak{s}_{,,}\mathfrak{s}_{,,,}}$ l b c
	c X .	c Z	c X . .				

§. 8.

Kriterien für die Gleichung (B).

Durch Verbindung der Relation §. 5 II. 6) mit den sich auf s beziehenden Resultaten in §. 7 erhalten wir folgende Kriterien:

$\binom{B}{11}$	∞		d		c		0		b		e		∞
						?				x			
2	»		c		d		0		b		e		»
		x						?					
3	»		c		0		d		b		e		»
		x						?					
4	»		c		0		b		d		e		»
		x											
5	»		c		0		b		e		d		»
		x								?			

$\binom{B}{21}$	∞		d		0		c		b		e		∞
										x			
2	»		0		d		c		b		e		»
				?						x			
3	»		0		c		d		b		e		»
		x						?					
4	»		0		c		b		d		e		»
		x											
5	»		0		c		b		e		d		»
		x								?			

$\binom{B}{31}$	∞		d		0		b		c		e		∞
										x			
2	»		0		d		b		c		e		»
				?						x			
3	»		0		b		d		c		e		»
				?						x			
4	»		0		b		c		d		e		»
		x				?							
5	»		0		b		c		e		d		»
		x				?				?			
$\binom{B}{41}$	∞		d		0		b		e		c		∞
										x,?			
2	»		0		d		b		e		c		»
				?						x,?			
3	»		0		b		d		e		c		»
				?						x			
4	»		0		b		e		d		c		»
				?						x			
5	»		0		b		e		c		d		»
		x				x				x			

In Betreff der zweifelhaften Intervalle folgt aus §. 6, da dieselben durch $q_{,}$, $q_{,,}$, q', q'' in Partialintervalle zerlegt werden, in deren jedem, wenn überhaupt drei reelle Wurzeln vorhanden, Eine und nur Eine Wurzel sich befindet, dass in den Fällen:

$\binom{B}{1} .. \binom{B}{4}$ bezügl. zw. $q_{,}$ u. 0, c, b, b

$\binom{B}{1} .. \binom{B}{3}$ » » q' u. 0, c, b

» » $\binom{q''}{q_{,,}}$ u. $+\infty$

höchstens Eine reelle Wurzel enthalten ist.

C. Bestimmung von Intervallen, in denen

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = x^3 - (b + e)\,x^2 + b\,(2e - d)\,x - b\,(e - d)\,e, \\ \text{wo} \qquad e > 0. \end{array}\right\} \quad (C)\ ^{*)}$$

sein Zeichen behält.

§. 9.

Eintheilung, Allgemeines.

I. Unterscheiden wir je nach der Lage von 0, b, e die Fälle:

$$(O) = (b\ \ 0\ \ e),$$
$$(B) = (0\ \ b\ \ e) \qquad\qquad \text{und:}$$
$$(E) = (0\ \ e\ \ b),$$

von denen wir den mittleren auf geometrischem Wege behandelt haben, und theilen die Fälle (O) und (E) ähnlich wie (B) ein und zwar, da die Function:

$$F(q) = q^3 - (b + e)\,q^2 + b\,(2e - d)\,q - b\,(e - d)\,e \quad . \ . \ (1)$$

sich auf die Formen:

$$F(q) = \left\{\begin{array}{ll} q\,(q - b)\,(q - e) + b\,(e - d)\,(q - e), \ldots\ldots & (2) \\ q\,(q - b)\,(q - d) + (d - e)\,[q^2 - 2\,b\,q + b\,e] \ . & (3) \end{array}\right.$$

bringen lässt (vergl. §. 4 u. § 6) und in jenen Fällen:

$$q^2 - 2\,b\,q + b\,e$$

nicht wie im Falle (B) stets positiv bleibt, sondern sein Zeichen ändert, wenn q durch:

$$\left.\begin{array}{l} g_{\prime} \\ g_{\prime\prime} \end{array}\right\} = b \mp \sqrt{b\,(b - e)}$$

geht, die Gruppe $\binom{O}{E}$ je nach der Aufeinanderfolge von e und

$$\begin{pmatrix} g_{\prime},\ b,\ 0,\ g_{\prime\prime},\ e \\ 0,\ g_{\prime},\ e,\ b,\ g_{\prime\prime} \end{pmatrix}$$

in sechs Abtheilungen und jede derselben in Betreff der Lage von d in sieben Unterabtheilungen ein. Diese Fälle bezeichnen wir durch zwei Indices, ähnlich wie in §. 5 I.

II. Zur Bestimmung von Intervallen, in denen F (q) durchweg positiv oder negativ ist, gibt uns jede der Gleichungen (2) und (3) ein Mittel an die Hand. Setzen wir nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} f(q) = (q - 0)\,(q - b)\,(q - e)\,(q - e)\,b\,(e - d), \\ f_{\prime}(q) = (q - 0)\,(q - b)\,(q - d)\,[q^2 - 2\,b\,q + b\,e]\,(d - e) \end{array}\right\} (1)$$

so folgt:

---

*) Die $e < 0$ entsprechenden Formen, welche durch $(\bar{O})$, $(\bar{B})$ und $(\bar{E})$ bezeichnet sein mögen (Vergl. §. 23), lassen sich leicht auf den obigen zurückführen.

Ist f(q) oder f,(q) positiv, so ist F(q) von Null verschieden. — Für das erste Intervall hat:

$$\left.\begin{array}{lllll} f(q) & \text{das Vorzeichen von} & \mp\,(c-d) & \text{wenn} & b \lessgtr 0 \\ f,(q) & \text{»} \quad\quad \text{»} & \text{»}\quad c-d & & \end{array}\right\} \ldots (2)$$

$$\text{Da}\begin{pmatrix} f(q) \\ f,(q) \end{pmatrix} \text{sein Zeichen ändert, wenn q durch} \begin{pmatrix} 0, b, e, c \\ 0, b, d, (g,, g,,) \end{pmatrix} \text{geht}$$

$$\text{Also} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{beibehält,} \quad ,, \quad ,, \quad \begin{pmatrix} d\,(g,, g,,) \\ e, c \end{pmatrix} \quad ,,$$

so bilden die den einzelnen Intervallen entsprechenden Zeichen

$$\text{von}\begin{pmatrix} f(q) \\ f,(q) \end{pmatrix} \text{eine Reihe mit} \begin{pmatrix} 1\,(3) \\ 2 \end{pmatrix} \text{Folgen. entspr.} \begin{pmatrix} d\,(g,, g,,) \\ e, c \end{pmatrix} \quad (3)$$

Mit Hülfe von (2) und (3) wollen wir nun für jeden der ad I. angedeuteten Fälle den successiven Intervallen die ihnen zukommenden Zeichen von f(q) und f,(q) einschreiben.

Die mit einem oder zwei + Zeichen behafteten Intervalle können keine Wurzeln enthalten.

§. 10.

Vorzeichen von f(q) und f,(q) für:

(O) = (b 0 e).

(O) 11	∞		d		c		g,		b		0		g,,		e		∞
		— +		— —		+ —		+ +		— —		+ +		+ —		— —	
2			c		d		g,		b		0		g,,		e		
		+ —		″ ″		— +		— —		+ +		— —		— +		+ +	
3			c		g,		d		b		0		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
4			c		g,		b		d		0		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		+ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
5			c		g,		b		0		d		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		— ″		″ ″		″ ″		″ ″	
6			c		g,		b		0		g,,		d		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
7			c		g,		b		0		g,,		e		d		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		+ —		″ ″	
(O) 21	∞		d		g,		c		b		0		g,,		e		∞
		— +		— —		— +		+ +		— —		+ +		+ —		— —	
2			g,		d		c		b		0		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
3			g,		c		d		b		0		g,,		e		
		+ —		+ +		″ ″		— —		+ +		— —		— +		+ +	
4			g,		c		b		d		0		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		+ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
5			g,		c		b		0		d		g,,		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		— ″		″ ″		″ ″		″ ″	
6			g,		c		b		0		g,,		d		e		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
7			b,		c		b		0		g,,		e		d		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		+ —		″ ″	

(O) 31	∞		d		g,		b		c		0		g,,		e		∞
2		— +	g,	— —	d	— +	b	+ —	c	— —	0	+ +	g,,	+ —	e	— —	
3		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	
4		″ ″	g,	″ ″	b	+ ″	c	″ ″	d	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	
5		+ —	g,	+ +	b	— —	c	″ ″	0	+ +	d	— —	g,,	— +	e	+ +	
6		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	c	″ ″	0	— ″	g,,	″ ″	d	″ ″	e	″ ″	
7		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	c	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	d	″ ″	
(O) 41	∞	″ ″	d	″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	c	″ ″	g,,	+ —	e	″ ″	∞
2		— +	g,	— —	d	— +	b	+ —	0	— +	c	+ +	g,,	+ —	e	— —	
3		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	d	″ ″	0	″ ″	c	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	
4		″ ″	g,	″ ″	b	+ ″	0	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	
5		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	— ″	c	″ ″	d	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	
6		+ —	g,	+ +	b	— —	0	+ +	c	″ ″	g,,	— —	d	— +	e	+ +	
7		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	c	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	d	″ ″	
(O) 51	∞	″ ″	d	″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	c	+ —	e	″ ″	∞
2		— +	g,	— —	d	— +	b	+ —	0	— +	g,,	— —	c	+ —	e	— —	
3		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	d	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	c	″ ″	e	″ ″	
4		″ ″	g,	″ ″	b	+ ″	0	″ ″	d	″ ″	g,,	″ ″	c	″ ″	e	″ ″	
5		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	— ″	g,,	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	e	″ ″	
6		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	c	″ ″	d	″ ″	e	″ ″	
7		+ —	g,	+ +	b	— —	0	+ +	g,,	+ —	c	″ ″	e	— +	d	+ +	
(O) 61	∞	″ ″	d	″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	+ —	c	″ ″	∞
2		— +	g,	— —	d	— +	b	+ —	0	— +	g,,	— —	e	+ —	c	— —	
3		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	d	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	c	″ ″	
4		″ ″	g,	″ ″	b	+ ″	0	″ ″	d	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	c	″ ″	
5		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	— ″	g,,	″ ″	d	″ ″	e	″ ″	c	″ ″	
6		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	
7		″ ″	g,	″ ″	b	″ ″	0	″ ″	g,,	″ ″	e	+ +	c	″ ″	d	″ ″	
		+ —		+ +		— —		+ +		+ —		— —		″ ″		+ +	

§. 11.

Vorzeichen von f (q) und f, (q) für:

(B) = (0 b e).

$(B)_{11}$	∞			d			c			0			b			e			∞
		+	+		+	—		—	—		+	+		—	—		+	—	
2				c			d			0			b			e			
		—	—		〃	〃		+	+		—	—		+	+		—	+	
3				c			0			d			b			e			
		〃	〃		〃	〃		—	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
4				c			0			b			d			e			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		+	〃		〃	〃		〃	〃	
5				c			0			b			e			d			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		—	—		〃	〃	
$(B)_{21}$	∞			d			0			c			b			e			∞
		+	+		+	—		—			+	+		—	—		+	—	
2				0			d			c			b			e			
		〃	〃		—	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
3				0			c			d			b			e			
		—	—		+	+		〃	〃		—	—		+	+		—	+	
4				0			c			b			d			e			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		+	〃		〃	〃		〃	〃	
5				0			c			b			e			d			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		—	—		〃	〃	
$(B)_{31}$	∞			d			0			b			c			e			∞
		+	+		+	—		—	+		+	—		—	—		+	—	
2				0			d			b			c			e			
		〃	〃		—	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
3				0			b			d			c			e			
		〃	〃		〃	〃		+	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
4				0			b			c			d			e			
		—	—		+	+		—	—		〃	〃		+	+		—	+	
5				0			b			c			e			d			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		—	—		〃	〃	
$(B)_{41}$	∞			d			0			b			e			c			∞
		+	+		+	—		—	+		+	—		—	—		+	—	
2				0			d			b			e			c			
		〃	〃		—	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
3				0			b			d			e			c			
		〃	〃		〃	〃		+	〃		〃	〃		〃	〃		〃	〃	
4				0			b			e			d			c			
		〃	〃		〃	〃		〃	〃		—	+		〃	〃		〃	〃	
5				0			b			e			c			d			
		—	—		+	+		—	—		+	—		〃	〃		—	+	

§. 10.

Vorzeichen von f (q) und f, (q) für:

(E) = (0 e b).

$(E)_{11}$	∞			d			c			0			g,			e			b			g,,			∞
		+	+		+	—		—	—		+	+		+	—		—	—		+	+		+	—	
2				c			d			0			g,			e			b			g,,			
		—	—		〃	〃		+	+		—	—		—	+		+	+		—	—		—	+	

(E) 13	c 0 d g, e b g,,
	— + — — + - — + + + — — -- +
4	c 0 g, d e b g,,
5	″ ″ c ″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ d ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
6	″ ″ c ″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e + — b ″ ″ d ″ ″ g,, ″ ″
7	″ ″ c ″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ b — ″ g,, ″ ″ d ″ ″
(E) 21	∞ ″ ″ d ″ ″ 0 ″ ″ c ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″ ∞
	+ + - — — + + + + — — — + + + —
2	0 d c g, e b g,,
3	″ ″ 0 — ″ c ″ ″ d ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
	— — - + ″ ″ — — — -- + + — — — +
4	0 c g, d e b g,,
5	″ ″ 0 ″ ″ c ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ d ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
6	″ ″ 0 ″ ″ c ″ ″ g, ″ ″ e + — b ″ ″ d ″ ″ g,, ″ ″
7	″ ″ 0 ″ ″ c ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ b — ″ g,, ″ ″ d ″ ″
(E) 31	∞ ″ ″ d ″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ c ″ ″ e ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″ ∞
	+ + · — — + — — + — — — + + + —
2	0 d g, c e b g,,
3	″ ″ 0 — ″ g, ″ ″ d ″ ″ c ″ ″ e ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
4	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ c ″ ″ d ″ ″ e ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
	— — · + + — ″ ″ — + + + — — — +
5	0 g, c e d b g,,
6	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ c ″ ″ e + — b ″ ″ d ″ ″ g,, ″ ″
7	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ c ″ ″ e ″ ″ b — ″ g,, ″ ″ d ″ ″
(E) 41	∞ ″ ″ d ″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ c ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″ ∞
	+ + + — — + — — + — — — + + + —
2	0 d g, e c b g,,
3	″ ″ 0 — ″ g, ″ ″ d ″ ″ e ″ ″ c ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
4	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ d ″ ″ c ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
5	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e + + c ″ ″ d ″ ″ b ″ ″ g,, ″ ″
	— — + + + — — — ″ ″ + + — — — +
6	0 g, e c b d g,,
7	″ ″ 0 ″ ″ g, ″ ″ e ″ ″ c ″ ″ b — ″ g,, ″ ″ d ″ ″
	″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″

(E)	∞		d		0		$g_{,}$		e		b		c		$g_{,,}$		∞
5 1		+ +		+ −		− +		− −		+ −		− +		+ +		+ −	
2			0		d		$g_{,}$		e		b		c		$g_{,,}$		
3		″ ″	0	− ″	$g_{,}$	″ ″	d	″ ″	e	″ ″	b	″ ″	c	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	
4		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	″ ″	d	″ ″	b	″ ″	c	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	
5		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	+ +	b	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	
6		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	″ ″	b	− ″	c	″ ″	d	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	
		− −		+ +		+ −		− −		+ +		″ ″		− −		− +	
7			0		$g_{,}$		e		b		c		$g_{,,}$		d		
		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″		″ ″	
(E)	∞		d		0		$g_{,}$		e		b		$g_{,,}$		c		∞
6 1		+ +		+ −		− +		− −		+ −		− +		− −		+ −	
2			0		d		$g_{,}$		e		b		$g_{,,}$		c		
3		″ ″	0	− ″	$g_{,}$	″ ″	d	″ ″	e	″ ″	b	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	c	″ ″	
4		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	″ ″	d	″ ″	b	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	c	″ ″	
5		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	+ +	b	″ ″	d	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	c	″ ″	
6		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	″ ″	b	− ″	$g_{,,}$	″ ″	d	″ ″	c	″ ″	
7		″ ″	0	″ ″	$g_{,}$	″ ″	e	″ ″	b	″ ″	$g_{,,}$	″ ″	c	″ ″	d	″ ″	
		− −		+ +		+ −		− −		+ +		+ −		″ ″		− +	

D. Die Zeichen der Coefficienten der aus (C) nach $q = 0, b \dots g_{,,}$ transformirten Gleichungen.

§. 13.

Die Werthe von F (q), F′(q) u. F″(q)

für $q = 0, b \dots g_{,,}$.

Die Function:

$$F(q) = q^3 - (b + c)\, q^2 + b\,(2c - d)\, q - b\,(c - d)\, e$$

lässt sich auf die Formen:

$$F(q) = \begin{cases} q\,(q - b)(q - c) + b\,(c - d)(q - e), \\ q\,(q - b)(q - d) + (d - c)(d - g_{,})(d - g_{,,}) \end{cases} \quad (1)$$

bringen (§. 9 I.).

Die erste Derivirte derselben ist:

$$F'(q) = 3\,q^2 - 2\,(b + c)\, q + b\,(2c - d) \;\ldots\ldots\; (2)$$

und die durch 2 getheilte zweite:

$$F''(q) = 3q - (b + c) = 3q - 2a. \;\ldots\ldots\; (3)$$

In diesen Ausdrücken haben wir in umgekehrter Reihenfolge die Coefficienten derjenigen Gleichung, deren Wurzeln um q kleiner sind als die von: $F(x) = 0$.

Wir wollen im gegenwärtigen Abschnitte die Vorzeichen der Coefficienten der nach $q = 0, b \ldots g_{\prime\prime}$ transformirten Gleichungen für die in §. 9 I. bezeichneten Fälle bestimmen, um auf diese Gleichungen das Fourier'sche Transformationstheorem *) anzuwenden.

Jene Coefficienten **) sind:

q	$F''(q)$	$F'(q)$	$F(q)$
0	$3.0 - 2a$	$b(2c - d)$ . . .	$-b(c - d)c$
b	$3b - 2a$	$b(b - d)$ . . .	$b(c - d)(b - e)$
c	$3c - 2a$	$c^2 - bd$	$b(c - d)(c - e)$
e	$3e - 2a$	$F'(e)$	$e(e - b)(e - c)$
d	$3d - 2a$	$(d - b)(3d - 2c)$	$(d - c)(d - g_{\prime})(d - g_{\prime\prime})$
$g_{\prime}$	$3g_{\prime} - 2a$	$F'(g_{\prime})$	$g_{\prime}(g_{\prime} - b)(g_{\prime} - d)$
$g_{\prime\prime}$	$3g_{\prime\prime} - 2a$	$F'(g_{\prime\prime})$	$g_{\prime\prime}(g_{\prime\prime} - b)(g_{\prime\prime} - d)$

*) Sind für die Gleichung des nten Grades:

$$F(x) = x^n - \alpha_{n-1} . x^{n-1} + \ldots (-1)^{n-1} . \alpha_{\prime} . x + (-1)^n . \alpha_0 = 0$$

$$(q_{\prime}), \quad (q_2) \ldots \quad (q_r)$$

die nach $q_{\prime} < q_2 \ldots < q_r$ transformirten Gleichungen, d. h. diejenigen, deren Wurzeln um diese Grössen kleiner sind als die von $F(x) = 0$, ferner:

$$z_{\prime}, \quad z_2 \ldots \quad z_r$$

bezüglich die Anzahl ihrer Zeichenwechsel und:

$$\omega_{\prime}, \quad \omega_2 \ldots \quad \omega_{r-1}$$

die in $(q_1\ q_2), (q_2\ q_3) \ldots (q_{r-1}\ q_r)$ enthaltenen reellen Wurzeln, so ist nach Fourier:

1) $z_1 \geqq z_2 \geqq \ldots \geqq z_r$,

2) $\omega_k = z_k - z_{k+1} - 2u_k$, wo $u_k \geqq 0$.

3) entspricht jeder Einheit von $u_1, u_2 \ldots$ Eine imaginäre Wurzel.

**) Für die Vorzeichen der in ihnen auftretenden Factoren lassen sich gemäss 1) der vorstehenden Note gewisse Beziehungen ableiten.

§. 14. Die Vorzeichen von F″(b)…, F′(b)…, F(b)… für (O) = (b 0 e).

$\binom{O}{11}$	d	c	g,	b	0	g,,	e
	-- + --	— c^2 - bd +	3g, - 2a F′(g,) +	3b - 2a — +	+ d - 2c +	+ F′(g,,) +	+ F′(e) +
2	c	d	g,	b	0	g,,	e
	„ „ „	3d - 2a 2c - 3d „	„ „ „	„ —	„ — —	„ „ „	„ „ „
3	c	g,	d	b	0	g,,	e
	„ „ „	3g, - 2a F′(g,) -	3d - 2a 2c - 3d —	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
4	c	g,	b	d	0	g,,	e
	„ „ „	„ „ „	3b - 2a „	3d - 2a 3d - 2c „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
5	c	g,	b	0	d	g,,	e
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	-- + „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
6	c	g,	b	0	g,,	d	e
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ F′(g,,) „	„ ⊤ „	„ „ „
7	c	g,	b	0	g,,	e	d
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ F′(e) „	„ „
$\binom{O}{21}$	d	g	c	b	0	g,,	e
	„ „ „	— „ +	— c^2 - bd -	3b - 2a —	„ d - 2c	„ F′(g,,) „	„ F′(e) „
2	g,	d	c	b	0	g,,	e
	„ F′(g, „	„ + „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
3	g,	c	d	b	0	g,,	e
	„ „ „	„ „ —	3d - 2a 2c - 3d	„ „ —	„ —	„ „ „	„ „ „
4	g,	c	b	d	0	g,,	e
	„ „ „	„ „ „	3b - 2a „	3d - 2a 3d - 2c „	„ „ „	„ „ 0	„ „ „
5	g,	c	b	0	d	g,,	e
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
6	g,	c	b	0	g,,	d	e
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ F′(g,,) „	„ „	„ „ „
7	g,	c	b	0	g,,	e	d
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ F′(e) „	„ „
$\binom{O}{31}$	d	g,	b	c	0	g,,	e
	„ + „	„ F′(g,) +	— -	3c - 2a	„ d - 2c	„ F′(g,,) „	„ F′(e) „
2	g,	d	b	c	0	g,,	e
	„ F′(g,) „	„ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
3	g,	b	d	c	0	g,,	e
	„ „ „	„ „ „	3d - 2a „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
4	g,	b	c	d	0	g,,	e
	„ „ „	„ „ —	3c - 2a c^2 - bd	3d - 2a 3d - 2c -	„ --	„ „ „	„ „ „
5	g,	b	c	0	d	g,	e
	„ „ „	„ „ „	„ „	„ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „
6	g,	b	c	0	g,,	d	e
	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ „ „	„ F′(g,,) „	„ „	„ „ „
7	g,	b	c	0	g,,	e	d

$\binom{O}{41}$	d	g, F′(g,)		b	− a	0		c c² − bd		g,, F′(g,,)	e F′(e
2	g, F′(g,)	d		b		0		c		g,,	e
3	g,	b		d		0		c		g,,	e
4	g,	b	3d − 2a	0		d		c		g,,	e
5	g,	b	a	0	3d − 2a	3d − 2c c		d		g,,	e
6	g,	b		d − 2c 0		c		g,, F′(g,,)		d	e
7	g,	b		0		c		g,,		e F′(e)	d
$\binom{O}{51}$	d	g, F′(g,)		b	− a	0	3g,, − 2a	g,,		c c² − bd	e F′(e)
2	g, F′(g,)	d		b		0		g,,		c	e
3	g,	b		d		0		g,,		c	e
4	g,	b	3d − 2a	0		d		g,,		c	e
5	g,	b	a	0	3d − 2a	3d − 2c g,,		d		c	e
6	g,	b		0	3g,, − 2a	F′(g,,) g,,	3d − 2a	3d − 2c c		d	e
7	g,	b		d − 2c 0		g,,		e		e F′(e)	d
$\binom{O}{61}$	d	g, F′(g,)		b	− a	0	3g,, − 2a	g,, F′(g,,)	3e − 2a	e	c c² − bd
2	g, F′(g,)	d		b		0		g,,		e	c
3	g,	b		d		0		g,,		e	c
4	g,	b	3d − 2a	0		d		g,,		e	c
5	g,	b	a	0	3d − 2a	3d − 2c g,,		d		e	c
6	g,	b		0	3g,, − 2a	F′(g,,) g,,	3d − 2a	3d − 2c e		d	c
7	g,	b		0		g,,	3e − 2a	F′(e) e	3d − 2a	3d − 2c c	d
				d − 2c							

§. 15. Die Vorzeichen von F″(b).., F′(b).., F(b).. für (B) = (0 b e).

$\binom{B}{11}$		d			c			0			b			e	
	—	+	—	—	+	—	—a	2c - d	—	+	+	—	—	F′(e)	+
2		c			d			0			b			e	
	„	„	+	3d - 2a	2c - 3d	+	„	—	+	„	„	+	„	„	„
3		c			0			d			b			e	
	„	c² - bd	„	—a	—	„	3d - 2a	„	„	„	„	„	„	„	„
4		c			0			b			d			e	
	„	„	„	„	„	„	+	„	„	„	„	„	„	„	„
5		c			0			b			e			d	
	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	F′(e)	„	„	.	„
$\binom{B}{21}$		d			0			c			b			e	
	„	+	—	—	+	—	3c - 2a	+	—	„	+	—	„	F′(e)	„
2		0			d			c			b			e	
	„	„	„	3d - 2a	2c - 3d	„	„	c² - bd	„	„	„	„	„	„	„
3		0			c			d			b			e	
	„	2c - d	.	3c - 2a	-	;	3d - 2a	—		„	„	..	..	„	„
4		0			c			b			d			e	
	„	„	„	„	„	„	+	„	„	„	„	„	„	„	„
5		0			c			b			e			d	
	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	F′(e)	„	„	.	„
$\binom{B}{31}$		d			0			b			c			e	
	„	+	—	—	+	—	3b - 2a	+	—	.		—	..	F′(e)	..
2		0			d			b			c			e	
	„	„	„	3d - 2a	2c - 3d	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
3		0			b			d			c			e	
	„	„	„	3b - 2a	—	„	3d - 2a	3d - 2c	„	„	„	„	„	„	„
4		0			b			c			d			e	
	„	2c - d	+	„	„	+	+	c² - bd	+	„	„	„	„	„	„
5		0			b			c			e			d	
	„	„	„	„	„	„	„	.	„	.	F′(e)	„	„	„	„
$\binom{B}{41}$		d			0			b			e			c	
	„						3b - 2a			3e - 2a	„	—	„	„	„
2		0			d			b			e			c	
	„	„	„	3d - 2a	2c - 3d	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„
3		0			b			d			e			c	
	„	„	„	3b - 2a	—	„	3d - 2a	3d - 2c	„	„	„	„	„	„	„
4		0			b			e			d			c	
	„	„	„	„	„	„	3e - 2a	F′(e)	„	3d - 2a	3d - 2c	„	„	„	„
5		0			b			e			c			d	
	„	2c - d	+	„	„	+	„	„	„	+	c² - bd	„	„	„	„

(11) 2	-	c	+	- -	—	d	+	—	- a	2c - d 0		—	3g, - 2a	F (g,) g,		-	3e - 2a	F' (e) e		—	+	b	-	·	+	F' (g,,) g,,		+
3	,,	c	,,	:	3d - 2a	2c - 3d 0	+		,,	— d		-	,,	g,	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	b	,,	—	,,	g,,	,,	,,
4	,,	c² - bd c		,,	—a	0	—	,,	3d - 2a	g,	,,	,,	,,	d	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
5	,,	c	,,	,,	,,	0	,,	,,	3g, - 2a	F' (g,) g,		..	3d - 2a	— e		,,	,,	d	,,	,,	,,	b	,,	,,	,,	g,	,,	,,
6	,,	c	,,	,,	,,	0	,,	,,	,,	g,	,,	..	3e - 2a	F' (e) e		,,	3d - 2a	— b		,,	,,	d	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
7	,,	c	,,	,,	,,	0	,,	,,	,,	g,	,,	,,	,,	e	,,	,,		b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,	,,	d	,,	,,
(E 21)	,,	d	,,	,,	,,	0	,,	,,	,,	c	,,	..	,,	g,	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	F' (g,,) b	,,	,,	,,	g,,		,,
2	,,	0	┐	—	—	d	-	—	3c - 2a	c	.		3g, - 2a	F' (g,) g,		,,	3e - 2a	F' (e) e		,,	,,	b	..	.	,	F' (g,,) g,,		,,
3	,,	0	,,	,,	3d - 2a	2c - 3d e		..	,,	c² - bd d		,,	,,	g	,,	,,	,,	e	,,	,,	·	b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
4	,,	2c - d 0		┌	3c - 2a	e	-		3d - 2a	g,		!	..	d	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	b	,,	—	,,	g,,	,,	,,
5	,,	0	,,	,,	,,	e	,,	,,	3g, - 2a	F' (g,) g,		,,	3d - 2a	— e		,,	,,	d	,,	,,	,,	b	,,	..		g,,	,,	,,
6	,,	0	,,	,,	.	c	..	..	..	g,	,,	,,	3e - 2a	F' (e) e		,,	3d - 2a	b		..	,,	d	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
7	,,	0	,,	,,	,,	c	,,	,,	..	g,	,,	.	,,	e	,,	,,		b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,	,,	d	,,	,,
(E 31)	,,	d	,,	,,	..	0	..	..	,,	g,	,,	,,	,,	c	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	F' (g,,) b	,,	,,	,,	g,,		,,
2	,,	0	+	—	--	d			3g, - 2a	g,	,,	-	3c - 2a	c	¦	,,	3e - 2a	F' (e) e		,,	,,	b	.	.	,,	F, (g,,) g,,		,,
3	,,	0	,,	..	3d - 2a	2c - 3d g,		,,	,,	d	,,	,	,,	c² - bd c		,,	,,	e	,,	,,	,,	b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
4	,,	0	,,	,,	3g, - 2a	F' (g,) g,			3d - 2a	2c - 3d c		.	,,	d	,,	,,	,,	e	,,	,,	,,	b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
5	,,	2c - d 0		—	,,	g,	,,	..	3c - 2a	— c		,,	3d - 2a	e		,,	,,	d	,,	,,	..	b	,,	—	,,	g,,	,,	,,
6	,,	0	,,	,,	,,	g,	,,	..	,,	c	,,	,,	3e - 2a	F' (e) e		,,	3d - 2a	— b		,,	,,	d	,,	,,	,,	g,,	,,	,,
7	,,	0	,,	,,	,,	g,	,,	,,	,,	c	,,	,,	,,	e	,,	,,	-	b	,,	,,	,,	g,,	,,	,,	,,	d	,,	,,
	,,		,,	,,	,,		,,	,,	,,		,,	,,	,,		,,	,,	,		,,	,,	,,	F' (g,,)	,,	,,				,,

(E)41	—	d +	—	—	0 +	—	3g, - 2a	g, F' (g,)	—	3e - 2a	e F' (e)	+	3c - 2a	c +	+	+	b ⊥	+	”	g,, F' (g,,)	”
2		0			d			g,			e			c			b			g,,	
3	”	0 ”	”	3d - 2a	2c - 3d g,	”	”	d ”	”	”	e ”	”	”	c² - bd c	”	”	b ”	”	”	g,, ”	”
4	”	0 ”	”	3g, - 2a	F' (g,) g,	+	3d - 2a	2c - 3d e	+	”	d ”	”	”	c ”	”	”	b ”	”	”	g,, ”	”
5	”	0 ”	”	”	g, ”	”	3e - 3a	F' (e) e	”	3d - 2a	2c - 3d c	”	”	d ”	”	”	b ”	”	”	g,, ”	”
6	”	2c - d 0	+	”	g, ”	”	”	e ”	”	3c - 2a	— c	—	3d - 2a	— b	—	”	d ”	—	”	g,, ”	”
7	”	0 ”	”	”	g, ”	”	”	e ”	”	”	c ”	”	+	b ”	”	”	g,, ”	”	”	d ”	”
(E)51	” ”	d ” +	” —	” —	0 ” +	” —	” 3g, - 2a	g, F' (g,)	”	” 3e - 2a	e ” F' (e)	” +	” 3b - 2a	b ” +	” +	” ”	F' (g,,) c +	” +	” ”	— g,, F' (g,,)	” ”
2		0			d			g,			e			b			c			g,,	
3	”	0 ”	”	3d - 2a	2c - 3d g,	”	”	d ”	”	”	e ”	”	”	b ”	”	”	c ”	”	”	g,, ”	”
5	”	0 ”	”	3g, - 2a	F' (g,) g,	+	3d - 3a	2c - 3d e		”	d ”	”	”	b ”	”	”	c ”	”	”	g,, ”	”
4	”	0 ”	”	”	g, ”	”	3e - 2a	F' (e) e	”	3d - 2a	2c - 3d b	”	”	d ”	”	”	c ”	”	”	g,, ”	”
6	”	0 ”	”	”	g, ”	”	”	e ”	”	3b - 2a	b	”	3d - 2a	3d - 2c c	”	”	d ”	”	”	g,, ”	”
7	”	2c - d 0	+	”	g, ”	”	”	e ”	”	”	b ”	—	+	c² - bd c	—	”	g,, ”	—	”	d ”	”
(E)61	” ”	d ” +	” —	” —	0 ” +	” —	” 3g, - 2a	g, ” F' (g,)	” —	” 3e - 2a	e ” F' (e)	” +	” 3b - 2a	b ” +	” +	” 3g,, - 2a	F' (g,,) g,, ”	” +	” ”	+ c	” ”
2		0			d			g,			e			b			g,,		”	c ”	”
3	”	0 ”	”	3d - 2a	2c - 3d g,	”	”	d ”	”	”	e ”	”	”	b ”	”	”	g,, ”	”	”	c ”	”
4	”	0 ”	”	3g, - 2a	F' (g) g,		3d - 2a	2c - 3d e	+	”	d ”	”	”	b ”	”	”	g,, ”	”	”	c ”	”
5	”	0 ”	”	”	g, ”	”	2e - 2a	F' (e) e	”	3d - 2a	2c - 3d b	”	”	d ”	”	”	g,, ”	”	”	c ”	”
6	”	0 ”	”	”	g, ”	”	”	e ”	”	3b - 2a	— b	”	3d - 2a	3d - 2c g,,	”	”	d ”	”	”	c ”	”
7	”	0 ” 2c - d	” +	”	g, ”	”	”	e ”	”	”	b ”	”	3g,, - 2a	F' (g,,] g,,	—	3d - 2a	3d - 2c c c² - bd	—	”	d ”	”

E. Bestimmung von Intervallen (x), (**), (?), in denen bezüglich Eine reelle, zwei imaginäre, zwei reelle oder imaginäre Wurzeln angezeigt sind.

Die beiden vorigen Abschnitte liefern uns nachstehende Kriterien *) für die Formen (C) **)

§. 17. Kriterien für (O) = (b 0 e).

Form.	Lage der Wurzeln zu den Elementen.																	nothw. u. hinr. Bedingungen.
$\binom{O}{11}$	∞		d		c		$g_,$		b		0		$g_{,,}$		e		∞	
				x						? - - - - -								d 2c
				x								**						
				x										**				
				x												? -		$F'(e) < 0$
2	„		c		d		$g_,$		b		0		$g_{,,}$		e		„	
				x				x				x						
3	„		c		$g_,$		d		b		0		$g_{,,}$		e		„	
				?								x - - -						nicht zugl. $3g_, - 2a < 0$ u. $F'(g_,) > 0$
						**						x						
								?				x - - -						$d < \frac{2}{3} c$
4	„		c		$g_,$		b		d		0		$g_{,,}$		e		„	
				?								x - - -						nicht zugl. „ „ „
						**						x						
								**				x						
										**		x - - -						$\frac{2}{3} c < d <$ [illegible] a
5	„		c		$g_,$		b		0		d		$g_{,,}$		e		„	
				?								x - - -						nicht zugl. „ „ „
						**						x						
								**				x - - -						$b < \frac{2}{3} a$
6	„		c		$g_,$		b		0		$g_{,,}$		d		e		„	
				?								x - - -						wie ad $\binom{O}{15}$
						**						x						
								**				x - - -						
7	„		c		$g_,$		b		0		$g_{,,}$		e		d		„	
				?								x - - -						„ „
						**						x						
								**				x - - -						

*) Aus denselben lassen sich die Kriterien für die Fälle, wo Gleichheiten zwischen den Elementen oder den in den Bedingungen vorkommenden Ausdrücken stattfinden, leicht ableiten.

**) Eine Form (C) geht in eine andere über, wenn man setzt: b = c, c = b′, $d = \frac{c}{b}.d'$ u. e = e′. Für die letztere ist: $\binom{g'_,}{g'_{,,}} = c \mp \sqrt{c(c-e)}$.

```
(O)  ∞   d       g       c       b       0       g,,     e       ∞
 21         x                         ?   -    -    -    -    -    d > 2c
            x                                 **
            x                                          **
            x                                              ?  -  | F'(e) < 0

     „   g,      d       c       b       0       g,,     e       „
            x                         ?   -    -    -    -    -    d > 2c
            x                                 **
            x                                          **
            x                                              ?  -  | F'(e) < 0

 3   „   g       c       d       b       0       g       e       „
                     **                       x
                             ?                x    -    -    -  | d < 2/3 c

 4   „   g,      c       b       d       0       g,      e       „
                     **                       x    -    -    -  | b > 2/3 a
                             **               x
                                     **       x    -    -    -  | 2/3 c < d < 2/3 a

 5   „   g,      c       b       0       d       g,      e       „
                     **                       x    -    -    -  | b > 2/3 a
                             **               x

 6   „   g,      c       b       0       g,,     d       e       „
                     **                       x    -    -    -  |
                             **               x                  |    ”

 7   „   g,      c       b       0       g,,     e       d       „
                     **                       x    -    -    -  |
                             **               x                  |    ”


(O)  „   d       g,      b       c       0       g,      e       „
 31         x                         ?   -    -    -    -    -    d > 2c
            x                                 **
            x                                          **
            x                                              ?  -    F'(e) < 0

 2   „   g,      d       b       c       0       g,      e       „
            x                         ?   -    -    -    -    -    d > 2c
            x                                 **
            x                                          **
            x                                              ?  -    F'(e) < 0

 3   „   g,      b       d       c       0       g,,     e       „
            x                         ?   -    -    -    -    -    d > 2c
            x                                 **
            x                                          **
            x                                              ?  -  | F'(e) < 0

 4   „   g       b       c       d       0       g,,     e       „
                     ?                        x
                             **               x    -    -    -  | c < 2/3 a u. c² > bd

 5   „   g,      b       c       0       d       g,,     e       „
                     ?                        x    -    -    -  | c > 2/3 a
                             **               x

 6   „   g,      b       c       0       g,,     d       e       „
                     ?                        x    -    -    -  |
                             **               x                  |    ”

 7   „   g,      b       c       0       g,,     e       d       „
                     ?                        x    -    -    -  |
                             **               x                  |    ”
```

```
(O 41) | ∞   d    g,   b    0    c    g,,  e    ∞
1      |      x                **  -    -    -    -    -  |  c² > - bd
       |      x                     **
       |      x                          **
       |      x                               ?          F'(e) < 0
2      | ,,   g,   d    b    0    c    g,,  e    ,,
       |      x                **  -    -    -    -    -     c² > bd
       |      x                     **
       |      x                          **
       |      x                               ?  -       F'(e) < 0
3      | ,,   g,   b    d    0    c    g,,  e    ,,
       |      x                **  -    -    -    -    -     c² > bd
       |      x                     **
       |      x                          **
       |      x                               ?  -       F'(e) < 0
4      | ,,   g,   b    0    d    c    g,,  e    ,,
       |      x              ?  -    -    -    -    -    -   d > 2/3 c
       |      x                **
5      | ,,   g,   b    0    c    d    g,,  e    ,,
       |           ?                x
       |                **          x    -    -    -  |  a > 0 u. d > 2c
6      | ,,   g,   b    0    c    g,,  d    e    ,,
       |           ?                x
       |                **          x    -    -    -         ,,        ,,
7      | ,,   g,   b    0    c    g,,  e    d    ,,
       |           ?                x
       |                **          x    -    -    -  |      ,,        ,,

(O 51) | ,,   d    g,   b    0    g,,  c    e    ,,
1      |      x                **
       |      x                     ?    -    -    -   c² > bd u. nicht zugl. { 3g,, - 2a > 0, F'(g,,) > 0
       |      x                          **
       |      x                               ?  -  |  F'(e) < 0
2      | ,,   g,   d    b    0    g,,  c    e    ,,
       |      x                **
       |      x                     ?    -    -    -
       |      x                          **              { wie ad (O 51)
       |      x                               ?  -
3      | ,,   g,   b    d    0    g,,  c    e    ,,
       |      x                **
       |      x                     ?    -    -    -
       |      x                          **              {
       |      x                               ?  -       {      ,,    ,,
4      | ,,   g,   b    0    d    g,,  c    e    ,,
       |      x              ?  -    -    -    -    -    -  |  d > 2/3 c
       |      x                **
       |      x                     ?    -    -    -  |  nicht zugl. 3g,, - 2a > 0 u. F'(g,,) > 0
5      | ,,   g,   b    0    g,,  d    c    e    ,,
       |      x         x         x                |
6      | ,,   g,   b    0    g,,  c    d    e    ,,
       |           ?                x
       |                **          x    -    -    -
       |                     **     x    -    -    -   { a > 0 u. d > 2c
7      | ,,   g,   b    0    g,,  c    e    d    ,,
       |           ?                x
       |                **          x    -    -    -
       |                     **     x    -    -    -   {    ,,    ,,    ,,
```

Form																
$\binom{O}{61}$	∞	d		g,		b		0		g,,		e	c		∞	
			x								x			x		
2	,,	g,		d		b		0		g,,		e	c		,,	
			x								x			x		
3	,,	g,		b		d		0		g,,		e	c		,,	
			x								x			x		
4	,,	g,		b		0		d		g,,		e	c		,,	
			x								x			x		
5	,,	g,		b		0		g,,		d		e	c		,,	
			x				x							x		
6	,,	g,		b		0		g,,		e		d	c		,,	
			x				x							x		
7	,,	g,		b		0		g,,		e		c	d		,,	
					?						x		- - -			Nicht zugl. a > 0 u. d > 2c
							**				x					
									**		x					
											x?		- - -			3e - 2a < 0 u. F'(e) > 0

§. 18.

Kriterien*) für (B) = (o b e).

Form	Lage der Wurzeln zu den Elementen												Nothw. und hinr. Bedingungen
$\binom{B}{11}$	∞		d		c		0		b			e	∞	
						?				x				
								**		x		- - -		a > 0 u. d < 2c
2	,,		c		d		0		b			e	,,	
		x						?						
3	,,		c		0		d		b			e	,,	
		x						?						
4	,,		c		0		b		d			e	,,	
		x						**						
5	,,		c		0		b		e			d		
		x						**		- - - -				F'(e) > 0
		x									?			
$\binom{B}{21}$	,,		d		0		c		b			e	,,	
						**				x		- -		$c > \frac{2}{3} a$
								**		x				
2	,,		0		d		c		b			e	,,	
				?						x		- -		$d > \frac{2}{3} c$
						**				x				
								**		x				
3	,,		0		c		d		b			e	,,	
		x						?						
4	,,		0		c		b		d			e	,,	
		x						**						
5	,,		0		c		b		e			d	,,	
		x						**		- - - -				F'(e) > 0
		x									?			

*) Vergl. §. 8.

(B 31)	∞ d 0 b c e ∞	
	** x - -	$b > \frac{2}{3} a$
	** x	
2	,, 0 d b c e ,,	
	? x - -	$d > \frac{2}{3} a$
	** x	
	** x - -	$b < \frac{2}{3} a$
3	,, 0 b d c e ,,	
	? x	
4	,, 0 b c d e ,,	
	x ? - - - - - - -	$c^2 > bd$
	x **	
5	,, 0 b c e d ,,	
	x ? - - - - - - -	,,
	x **	
	x ?	$F'(e) < 0$
(B 41)	,, d 0 b e c ,,	
	** x - -	$b > \frac{2}{3} a$
	** x	
	? x - -	$3e - 2a < 0$ u. $F'(e) > 0$
2	,, 0 d b e c ,,	
	? x - -	$d > \frac{2}{3} a$
	** x	
	** x	
	? x - -	$3e - 2a < 0$ u. $F'(e) > 0$
3	,, 0 b d e c ,,	
	? x	
4	,, 0 b e d c ,,	
	? x	
5	,, 0 b e c d ,,	
	x x x	

§. 19.
Kriterien für (E) = (o e b).

Form.	Lage der Wurzeln zu den Elementen	Nothw. u. hinr. Bedingungen.
(E 11)	∞ d c 0 g, e b g,, ∞	
	? x - - - -	nicht zugl $a > 0$ u $d < 2c$
	** x	
	** x	
	? x - - - -	$3e - 2a < 0$ u. $F'(e) > 0$
2	,, c d 0 g, e b g,, ,,	
	x x x	
3	,, c 0 d g, e b g,, ,,	
	x x x	
4	,, c 0 g, d e b g,, ,,	
	x x x	
5	,, c 0 g, e d b g,, ,,	
	x x x	
6	,, c 0 g, e b d g,, ,,	
	x x x	
7	,, c 0 g, e b g,, d ,,	
	x x x	

```
(E 21) | ∞  d  0  c  g,  e  b  g,,  ∞ |
       |        **         x           |  c > 2/3 a
       |           **      x           |
       |              **   x           |
       |                 ? x  - - -    |  3e - 2a < 0 u. F'(e) > 0
2      | ,,  0  d  c  g,  e  b  g,,  ,, |
       |     ?             x  - - -    |  d > 2/3 c
       |        **         x           |
       |           **      x           |
       |              **   x           |
       |                 ? x           |  3e - 2a < 0 u. F'(e) > 0
3      | ,,  0  c  d  g,  e  b  g,,  ,, |
       |   x         x         x       |
4      | ,,  0  c  g,  d  e  b  g,,  ,, |
       |   x         x         x       |
5      | ,,  0  c  g,  e  d  b  g,,  ,, |
       |   x         x         x       |
6      | ,,  0  c  g,  e  b  d  g,,  ,, |
       |   x         x         x       |
7      | ,,  0  c  g,  e  b  g,,  d  ,, |
       |   x         x         x       |

(E 31) | ,,  d  0  g,  c  e  b  g,,  ,, |
       |        **         x - - - -   |
       |           ?       x - - - -   |  c > 2/3 a
       |              **   x           |
       |                 ? x           |
2      | ,,  0  d  g,  c  e  b  g,,  ,, |
       |     ?             x - - - -   |  d > 2/3 c
       |        **         x           |
       |           ?       x           |
       |              **   x           |
       |                 ? x - - - -   |  3e - 2a < 0 u. F'(e) >
3      | ,,  0  g,  d  c  e  b  g,,  ,, |
       |      x       x      x         |
4      | ,,  0  g,  c  d  e  b  g,,  ,, |
       |   x          x        x       |
5      | ,,  0  g,  c  e  d  b  g,,  ,, |
       |   x          x        x       |
6      | ,,  0  g,  c  e  b  d  g,,  ,, |
       |   x          x        x       |
7      | ,,  0  g,  c  e  b  g,,  d  ,, |
       |   x          x        x       |

(E 41) | ,,  d  0  g,  e  c  b  g,,  ,, |
       |        **   x                 |
       |           ? x                 |
       |             x  **             |
       |             x       ?         |  c < 2/3 a
2      | ,,  0  d  g,  e  c  b  g,,  ,, |
       |     ?       x - - - - - - -   |  d > 2/3 c
       |        **   x                 |
       |           ? x                 |
       |             x  **             |
       |             x       ?  - - -  |  nicht zugl. c > 2/3 a u. c² > bd
```

(E 43)

```
,,  0   g,   d   e   c   b   g,,  ,,
       x         ?   -  -  -  -  -  -
       x              **
       x                    ?  -  -  -
```

$3e - 2a > 0$ u. $F'(e) > 0$

nicht zugl. $c > \frac{2}{3}a$ u. $c^2 > bd$

4

```
,,  0   g,   e   d   c   b   g,,  ,,
       x            **
       x                   ?  -  -  -
```

" " "

5

```
,,  0   g,   e   c   d   b   g,,  ,,
   x             x           x
```

6

```
,,  0   g,   e   c   b   d   g,,  ,,
   x             x           x
```

7

```
,,  0   g,   e   c   b   g,,  d   ,,
   x             x           x
```

(E 51)

```
,,  d   0   g,   e   b   c   g,,  ,,
          **     x
                ? x
                 x     **
                 x         **   -  -  -
```

$b < \frac{2}{3}a$

2

```
,,  0   d   g,   e   b   c   g,,  ,,
      ?          x   -  -  -  -  -  -
          **     x
                ? x
                 x     **
                 x         **   -  -  -
```

$d > \frac{2}{3}a$

$b < \frac{2}{3}a$

3

```
,,  0   g,   d   e   b   c   g,,  ,,
   ? x   -  -  -  -  -  -  -  -  -  -
     x    **
     x           ?
     x              **
     x                  **   -  -  -  -
```

$3g_{,} - 2a > 0$ u. $F'(g_{,}) > 0$

$b < \frac{2}{3}a$

4

```
,,  0   g,   e   d   b   c   g,,  ,,
   ? x   -  -  -  -  -  -  -  -  -  -
     x    **
     x          **
     x              **
     x                  **   -  -  -  -
```

$3g_{,} - 2a > 0$ u. $F'(g_{,}) > 0$

$b < \frac{2}{3}a$

5

```
,,  0   g,   e   b   d   c   g,,  ,,
     x             ?   -  -  -  -  -
     x                   **
```

$d > \frac{2}{3}c$

6

```
,,  0   g,   e   b   c   d   g,,  ,,
   x             x           x
```

7

```
,,  0   g,   e   b   c   g,,  d   ,,
   x             x           x
```

(E 61)

```
,,  d   0   g,   e   b   g,,  c   ,,
          **     x
                ? x
                 x     **
                 x         **   -  -  -
                 x             ?  -  -
```

$b < \frac{2}{3}a$

2

```
,,  0   d   g,   e   b   g,,  c   ,,
      ?          x   -  -  -  -  -  -
          **     x
                ? x
                 x     **
                 x         **   -  -  -
                 x             ?  -  -
```

$d > \frac{2}{3}a$

$b < \frac{2}{3}a$

3	∞		0		$g_,$		d		e		b		$g_{,,}$		c		∞	
				? x		-	-	-		-	-	-	-	-	-		-	$3 g_, - 2a > 0$ u. $F'(g_,) > 0.$
				x		**												
				x				?										
				x						**								
				x								**		-	-		-	
				x										?	-		-	$\{ b < \frac{2}{3} a$

4	,,		0		$g_,$		e		d		b		$g_{,,}$		c		,,	
				? x														
				x		**												
				x				**										
				x						**								
				x								**		-	-		-	
				x										?	-		-	$\{ b < \frac{2}{3} a$

5	,,		0		$g_,$		e		b		d		$g_{,,}$		c		,,	
				x						?	-	-	-	-	-		-	$d > \frac{2}{3} c$
				x								**						
				x										?	-		-	nicht zugl. $3g_{,,} - 2a > 0$ u. $F'(g_{,,}) > 0$

6	,,	0		$g_,$	e	b		$g_{,,}$	d		c	,,
			x				x			x		

7	,,		0	$g_,$	e		b	$g_{,,}$	c		d	,,
		x				x				x		

F. Anwendung der Kriterien in E auf die Gleichung:

$$F(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \;..(G)\,^{*)}$$

§. 20.

Identificirung der Form (G) mit (C) (Abschnitt E.).

Die beliebig vorgelegte cubische Gleichung:

$$F(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \quad . \;.\; .\; . \quad (G)$$

wird identisch mit:

$$x^3 - (b + c)\,x^2 + b\,(2c - d)\,x - b\,(c - d)\,e = 0, \; . \quad . \quad (C)$$

wenn:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha & = b + c, \\ \beta & = b\,(2c - d), \\ \gamma & = b\,(c - d)\,e; \end{array}\right\} \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (1)$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\alpha}{2}, \\ \left.\begin{array}{l} b \\ c \end{array}\right\} = a \mp v, \\ d = 2c - \dfrac{\beta}{b} \quad \text{und:} \\ e = \dfrac{\gamma}{v^2 + \varepsilon}; \end{array}\right\} \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (2)$$

wo: $\varepsilon = \beta - a^2$ & $-\infty < v < +\infty$.

oder auch, b als Parameter angesehen:

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < b < +\infty, \\ c = \alpha - b, \\ d = 2\alpha - 2b - \dfrac{\beta}{b}, \\ e = \dfrac{\gamma}{\varphi(b)}; \\ \text{wo:} \quad \varphi(b) = \begin{cases} b^2 - 2ab + \beta \\ (b - \delta_{,})(b - \delta_{,,}) \end{cases} \\ \left.\begin{array}{l} \delta_{,} \\ \delta_{,,} \end{array}\right\} = a \mp \sqrt{-\varepsilon} \quad \text{u.} \\ \varepsilon = \beta - a^2. \end{array}\right\} \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (3)$$

---

*) Wir beschäftigen uns nur mit denjenigen Formen (G), welche drei oder zwei Zeichenwechsel haben, die übrigen lassen sich leicht auf jene zurückführen.

Zu jedem b gehört Eine Form (C). Jeder Gleichung (G) entsprechen also unendlich viele Formen (C).

Da $\binom{g_{\prime}}{g_{\prime\prime}} = b \mp \sqrt{b(b-e)} = b \mp b \sqrt{\frac{F(b)}{F(b)-F(0)}}$, (4)

so liegt eine Form (B) vor (§. 5 I., §. 9 I.); wenn und nur wenn F (b) und F (0) — F (b) dasselbe Vorzeichen, also das von F (0) haben. Ein einer Form (B) angehöriges b lässt sich nach folgendem Schema bestimmen: (5)

$$-\alpha \quad \beta \quad -\gamma \quad = F(0) \quad (b.$$

$$\frac{b}{s_1} \quad \frac{b\,s_1}{s_2} \quad \frac{b\,s_2}{s_3} \quad = \frac{F(b)}{F(0)-F(b)}$$

Bezeichnet τ eine positive, zu $\frac{\gamma}{\beta}$ hinlänglich kleine Grösse, so genügt $b = +\tau$ wenn die Zeichen von $-\alpha, \beta, -\gamma$:

+, +, + ; —, +, + ; +, —, + ; oder —, —, + sind,

$b = -\tau$ in den übrigen Fällen.

§. 21.

Abhängigkeit der in E vorkommenden Grössen von b.

I. Aus §. 20. 3 folgt:

$$d = -\frac{2}{b}\left(b^2 - 2ab + \frac{\beta}{2}\right),$$

$$d - 2c = -\frac{\beta}{b},$$

$$d - \frac{2}{3}c = -\frac{4}{3b}\left(b^2 - 2ab + \frac{3}{4}\beta\right) \quad \text{und:} \qquad (1)$$

$$c^2 - bd = 3\left(b^2 - \frac{4}{3}\alpha . b + \frac{\alpha^2 + \beta}{3}\right).$$

Mithin hat, wenn b von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst:

anfänglich d, $d - \frac{2}{3}c$ und $c^2 - bd$ das Zeichen +,
" $d - 2c$ " " von β. (2)

d ändert sein Zeichen für $b = 0,\ a \mp \sqrt{\left(a^2 - \frac{\beta}{2}\right)}$,

$d - 2c$ " " " " " " 0,

$d - \frac{2}{3}c$ " " " " " " $0, \frac{\alpha}{2} \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ und: (3)

$c^2 - bd$ " " " " " " $\frac{2\alpha}{3} \mp \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$.

Der Coefficient von x in der nach q transformirten Gleichung ist:

$$F'(q) = 3\left(q^2 - \frac{2\alpha}{3}\,q + \frac{\beta}{3}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } F'(q) > 0 \text{ für jedes q, wenn } \lambda < 0 \qquad \text{und:} \\ \quad \text{„} \gtreqless 0 \text{ „ „ „} \binom{\text{ausserhalb}}{\text{innerhalb}} : (\varrho, \varrho') \text{ wenn } \lambda > 0, \\ \text{wo:} \quad \lambda = \alpha^2 - 3\beta \text{ und } \binom{\varrho'}{\varrho,} = \frac{\alpha}{3} \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{3}. \end{array}\right\} (5)$$

II. Wächst b stetig von $-\infty$ bis $+\infty$, so ändern sich d und e wie folgt*):

1. Aenderung von d.
   a) Ist $\beta < 0$, so nimmt d beständig ab: von $+\infty$ bis $-\infty$, von $+\infty$ weiter ab bis wieder $-\infty$.
   b) Ist $\beta > 0$, so nimmt d ab von $+\infty$ bis $2(\alpha + \sqrt{2\beta})$, geht zurück nach $+\infty$, nimmt weiter zu von $-\infty$ bis $2(\alpha - \sqrt{2\beta})$, schliesslich wieder ab und zwar bis $-\infty$ $\left(\frac{\mathbf{d}(d)}{\mathbf{d}(b)} = -2 + \frac{\beta}{b^2}\right)$.
2. Aenderung von e.
   a) Ist $\gamma > 0$, so nimmt e beständig zu, ab, während b das Intervall $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ durchläuft.
   b) Ist $\gamma < 0$, so findet das Gegentheil statt.

§. 22.

Kriterien für die Gleichung:

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \,..\, (G).$$

Die Formen (G) theilen wir je nach den Zeichen von $-\alpha$, $+\beta$, $-\gamma$ in folgende Gruppen ein:
(I) = (— + —), (II) = (— + +), (III) = (+ — +) & (IV) = (— — +)

Behalten wir die Bezeichnungen in §. 20 sowie §. 21 I. (5) bei und verstehen allgemein unter: ·q, q· eine, q auf der negativen, positiven Seite unendlich benachbarte Grösse, so fliessen aus den Kriterien des Abschnittes E folgende Special-Kriterien, in denen die fettgedruckten Buchstaben den Elementen b entsprechen.

---

*) Wir denken uns die reelle Zahlenreihe im Unendlichen geschlossen.

(G)	(C)	Lage der Wurzeln zu den Elementen.	Nothw. u. hinr. Bedingungen.
(I)	$\binom{B}{31}$	∞ $\infty\cdot$ 0 **0·** α $\frac{\gamma}{\beta}$ ∞ ** x	
	41	" $\infty\cdot$ 0 **0·** $\frac{\gamma}{\beta}$ α " ** x x, ?	$\lambda < 0$ u. $\frac{\gamma}{\beta} < \frac{\alpha}{3}$ oder: $\lambda > 0$ " " $< \varrho_{,}$
$\varepsilon > 0$ (I)	$\binom{B}{31}$	" d 0 ·**a** a· $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ " ** x	
	2	" 0 d ·**a** a· $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ " ? x . . . . . . ** x	$d > \frac{\alpha}{3}$
	$\binom{E}{51}$	∞ d 0 $g_{,}$ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·**a** a· $g_{,,}$ ∞ ** x x,? x **	
	2	" 0 d $g_{,}$ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·**a** a· $g_{,,}$ " ? x . . . . ** x x,? x **	$d > \frac{\alpha}{3}$
	3	" 0 $g_{,}$ d $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·**a** a· $g_{,,}$ " x,? . . . . x ** x ? x **	$\lambda < 0$ u. $g_{,} > \frac{\alpha}{3}$ oder: $\lambda > 0$ " $g_{,} > \varrho'$
	4	" 0 $g_{,}$ $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ d ·**a** a· $g_{,,}$ " x,? . . . . x ** x ** x **	" " "
$\varepsilon < 0$ (I)	$\binom{B}{33}$	" 0 ·$\delta_{,}$ $d = \delta_{,,}$· ·∞ ∞ " ? x	
	$\binom{\bar{O}}{22}$	" $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ $g_{,}$ 0 ·**a** a· d $g_{,,}$ " ? x	
(II)	$\binom{\bar{B}}{11}$	" $\frac{\gamma}{\beta}$ ·**0** 0 α ·∞ ∞ x ?	
$\varepsilon > 0$ (II)	$\binom{\bar{O}}{24}$	" $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ $g_{,}$ 0 d ·**a** a· $g_{,,}$ " x ** x **	$\lambda = 0$
$\varepsilon < 0$ (II)	$\binom{B}{34}$	" 0 $\delta_{,}$· ·$\delta_{,,}$ d ·∞ ∞ x ?	
	"	" 0 ·**a** a· d $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ " x **	

(G)	(C)	Lage der Wurzeln zu den Elementen.	Nothw. u. hinr. Bedingungen.
	$\binom{B}{35}$	∞ 0 ·a a· $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ d ∞	
		x **	
		x ?	$\lambda > 0$ u. $\frac{\gamma}{\varepsilon} < \varrho'$
	$\binom{E}{56}$	„ 0 g, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·a ·a· d g,, ∞	
		x x x	
	7	„ 0 g, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·a a· g,, d „	
		x x x	
(III)	$\binom{B}{15}$	∞ α 0 0· $\frac{\gamma}{\beta}$ ·∞ ∞	
		x **	
		x ?	$\lambda > 0$ u. $\frac{\gamma}{\beta} < \varrho'$
	$\binom{B}{12}$	„ $\delta_{,}$· = d 0 ·$\delta_{,,}$ ·∞ „	
		x ?	
	$\binom{O}{31}$	„ d g, ·a a· 0 g,, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ∞	
		x **	
		x **	
		x ?	$\frac{\gamma}{\varepsilon} < \varrho'$
	2	„ g, d ·a a· 0 g,, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ „	
		x **	
		x **	
		x ?	$\frac{\gamma}{\varepsilon} < \varrho'$
(IV)	$\binom{B}{35}$	∞ 0 0· α $\frac{\gamma}{\beta}$ ·∞ ∞	
		x ?	$\alpha^2 > -\beta$.
		x **	
		x ?	$\lambda > 0$ u. $\frac{\gamma}{\beta} < \varrho'$
	45	„ 0 0· $\frac{\gamma}{\beta}$ α ·∞ „	
		x x x	
	$\binom{B}{12}$	„ $\delta_{,}$· = d 0 ·$\delta_{,,}$ ·∞ „	
		x ?	
	$\binom{B}{84}$	„ 0 ·a a· d $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ „	
		x **	
	5	„ 0 ·a a· $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ d „	
		x **	
		x ?	$\frac{\gamma}{\varepsilon} < \varrho'$
	$\binom{E}{57}$	„ 0 g, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ ·a a· g,, d ∞	
		x x x	

Für die mit (IV) bezeichnete Gleichung (G) sind, falls $\frac{\gamma}{\beta} < \alpha$ ist [Vergl. obig. Krit. $\binom{B}{45}$]:

$$b = \sqrt{-\beta},\ c = \alpha - b,\ d = 2\alpha - b,\ e = -\frac{\gamma}{\alpha\, b}\ \&\ \begin{matrix} g_{,} \\ g_{,,} \end{matrix}\Big\} = b \mp \sqrt{\left(\frac{\gamma - \alpha\beta}{\alpha}\right)}$$

die Elemente einer der folgenden Gleichungen:

$$\binom{E}{12,\ 13,\ 14,\ 15\ ;\ 26,\ 27\ ;\ 36,\ 37\ ;\ 46,\ 47\ ;\ 56,\ 57}\ \&\ \binom{E}{67}.$$

Die Gleichung (G) besitzt also in diesem Falle drei reelle, durch jene Werthe von einander getrennte Wurzeln.

Zu $b = \frac{\beta}{\alpha}$ gehören $c = \alpha - b,\ d = \alpha - 2b,\ e = \frac{\gamma}{b^2}\ \&\ \binom{g_{,}}{g_{,,}} = b \mp \sqrt{\left(\frac{b^3 - \gamma}{b}\right)}$

§. 23.

(G)	Die zu der Gleichung (G) gehörenden Formen (C).
(I)	$\binom{O}{45\ ..\ 47\ ;\ 56,\ 57\ ;}\binom{O}{67}$. $\binom{B}{11\ ;\ 21,\ 22\ ;\ 31\ ..\ 33\ ;\ 41\ ..}\binom{B}{44}$. $\binom{E}{11\ ;\ 21,\ 22\ ;\ 31\ ..\ 33\ ;\ 41\ ..\ 44\ ;\ 51\ ..\ 55\ ;\ 61\ ..}\binom{E}{66}$. $\binom{\overline{O}}{11\ ;\ 21,\ 22\ ;\ 31\ ..}\binom{\overline{O}}{33}$.
(II)	$\binom{B}{23\ ..\ 25\ ;\ 34,\ 35\ ;}\binom{B}{45}$. $\binom{E}{23\ ..\ 27\ ;\ 34\ ..\ 37\ ;\ 45\ ..\ 47\ ;\ 56\ ..\ 57\ ;}\binom{E}{67}$. $\binom{\overline{O}}{12\ ..\ 17\ ;\ 23\ ..\ 27\ ;\ 34\ ..\ 37\ ;\ 45\ ..\ 47\ ;\ 56,\ 57\ ;}\binom{\overline{O}}{67}$. $\binom{\overline{B}}{11}$. $\binom{\overline{E}}{11}$.
(III)	$\binom{O}{11\ ;\ 21,\ 22\ ;\ 31\ ..\ 33\ ;\ 41\ ..\ 44\ ;\ 51\ ..\ 55\ ;\ 61\ ..}\binom{O}{66}$. $\binom{B}{12\ ..}\binom{B}{15}$. $\binom{E}{12\ ..}\binom{E}{17}$. $\binom{\overline{O}}{45\ ..\ 47\ ;\ 56,\ 57\ ;}\binom{\overline{O}}{67}$. $\binom{\overline{B}}{11}$. $\binom{\overline{E}}{11}$.

(IV)	$\binom{O}{41}$ . . 44 ; 51 . . 55 ; 61 . . $\binom{O}{66}$. $\binom{B}{12}$ . . 15 ; 23 . . 25 ; 34 , 35 ; $\binom{B}{45}$. $\binom{E}{12}$ . . 17 ; 23 . . 27 ; 34 . . 37 ; 45 . . 47 ; 56 . 57 ; $\binom{E}{67}$. $\binom{\overline{O}}{45}$ . . 47 ; 56 , 57 ; $\binom{\overline{O}}{67}$. $\binom{\overline{B}}{11}$. $\binom{\overline{E}}{11}$.

Die Anzahl der reellen Wurzeln von (C) ist ohne Weiteres aus Abschn. E. zu ersehen in folgenden Fällen:

(G)	Die der Gleichung (G) entsprechenden unzweifelhaften Formen (C).
(I)	$\binom{B}{21}^*$, $\binom{B}{31}^*$. $\binom{E}{66}$.
(II)	$\binom{B}{24}^*$, $\binom{B}{45}$. $\binom{E}{23}$ . . 27 ; 34 . . 37 ; 45 . . 47 ; 56 , 57 ; $\binom{E}{67}$. $\binom{\overline{O}}{12}$, $\binom{\overline{O}}{24}^*$ . . $\binom{\overline{O}}{27}^*$.
(III)	$\binom{O}{55}$; 61 . . $\binom{O}{66}$. $\binom{B}{14}^*$. $\binom{E}{12}$ . . $\binom{E}{17}$.
(IV)	$\binom{O}{55}$; 61 . . $\binom{O}{66}$. $\binom{B}{14}^*$; 24 ; $\binom{B}{45}$. $\binom{E}{12}$ . . 17 ; 23 . . 27 ; 34 . . 37 ; 45 . . 47 ; 56 , 57 ; $\binom{E}{67}$.

Die mit einem Sternchen bezeichneten Gleichungen haben nur Eine reelle Wurzel.*)

*) In den übrigen Fällen (C) entscheidet §. 28 (1)., falls das betreffende Kriterium des Abschnitts E. zweifelhaft ist.

G. Berechnung der reellen Wurzeln von (G).

§. 24.

Lage der Wurzeln zu: a, α, $\delta_,$, $\delta_{,,}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ u. $\frac{\gamma}{\beta}$.

Die reellen Wurzeln x der Gleichung (G) lassen sich gemäss der aus §. 20. 3) fliessenden Relation:

$$b - e = \frac{F(b)}{\varphi(b)},$$

nach welcher: wenn $b = x$, auch $b = e$ und
„ $b = e$, „ $e = x$ ist,

näherungsweise berechnen.

Hiernach bestimmen wir zunächst d. Lage d. Wurzeln zu:

b	$0, \alpha$	a	$\delta_,, \delta_{,,}$
e	$\frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	∞

[Vergl. §. 27 I. 1, 2 u. 3], indem wir in jedem der Fälle, welche durch die Aufeinanderfolge dieser Werthe bedingt sind, den Parameter b die successiven von $0, \alpha, a, \delta_,$ u. $\delta_{,,}$ gebildeten Intervalle durchlaufen lassen. [§. 21 II. (2)]

Wurzelintervalle (l_1 l_2).										(G)
∞	0	$\frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	a	α	∞	.	.	.	$\varepsilon > 0$ $\binom{I}{11}$
		x xxx								
„	0	$\frac{\gamma}{\beta}$	a	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	α	„	.	.	.	2
		xx	x x							
„	0	$\frac{\gamma}{\beta}$	a	α	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	„	.	.	.	3
		xx	x x							
∞	0	a	$\frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	α	∞	.	.	.	21
			x							
„	0	a	$\frac{\gamma}{\beta}$	α	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	„	.	.	.	22
„	0	a	α	$\frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\varepsilon}$	„	.	.	.	3
			x							

Wurzelintervalle (l_1 l_2).																	(G)
∞		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		0		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		α		∞	$\varepsilon < 0$ $\binom{\mathrm{I}}{1}$
													x				
							xx						x				
,,		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		0		$\delta_{,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		a		$\delta_{,,}$		α		,,	2
													x				
,,		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		0		$\delta_{,}$		a		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,,}$		α		,,	3
													x				
,,		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		0		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		α		,,	4
													x				
,,		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		0		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		α		$\frac{\gamma}{\beta}$		,,	5
													x				
∞		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		a		α		∞					$\varepsilon > 0$ (II)
					x												
,,		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		α		∞	$\varepsilon < 0$ $\binom{\mathrm{II}}{1}$
			x						x		x						
,,		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		$\delta_{,}$		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		a		$\delta_{,,}$		α		,,	2
			x						x		x						
,,		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		$\delta_{,}$		a		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\delta_{,,}$		α		,,	3
			x														
			x								xx						
,,		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		α		,,	4
			x														
,,		$\frac{\gamma}{\beta}$		0		$\delta_{,}$		a		$\delta_{,,}$		α		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		,,	5
			x														
∞		$\delta_{,}$		α		a		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,,}$		∞	$\binom{\mathrm{III}}{11}$
	x																
	x												xx				
,,		$\delta_{,}$		α		a		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		,,	12
	x																
,,		$\delta_{,}$		α		a		0		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		,,	2
	x																

Wurzelintervalle ($l_1 l_2$).																	(G)
∞		$\delta_,$		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		a		α		$\delta_{,,}$		∞	$\binom{IV}{11}$
	x						x						x				
„		$\delta_,$		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		a		$\frac{\gamma}{\beta}$		α		$\delta_{,,}$		„	2
	x						x						x				
„		$\delta_,$		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		a		α		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,,}$		„	3
	x						x		x								
„		$\delta_,$		0		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		a		α		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		„	4
	x						x		x								
„		$\delta_,$		0		a		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		α		$\delta_{,,}$		„	21
	x								x				x				
∞		$\delta_,$		0		a		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		α		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,,}$		∞	22
	x																
	x								xx								
	x												xx				
„		$\delta_,$		0		a		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		α		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		„	3
	x																
	x								xx								
„		$\delta_,$		0		a		α		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		$\delta_{,,}$		„	31
	x																
	x												xx				
„		$\delta_,$		0		a		α		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		„	32
	x																
„		$\delta_,$		0		a		α		$\delta_{,,}$		$\frac{\gamma}{\varepsilon}$		$\frac{\gamma}{\beta}$		„	4
	x																

Die vorstehenden Kriterien finden in §. 22 ihre Bestätigung und Ergänzung.

§. 25.

Eintheilung der Wurzelintervalle (l_1 l_2).

Die Intervalle (l_1 l_2) theilen wir nach der gegenseitigen Lage der entsprechenden von b und e, die mit

$$(b_1\ b_2)\ \&\ (e_1\ e_2)$$

bezeichnet sein mögen, und der Anzahl der in ihnen enthaltenen Wurzeln wie folgt ein, wobei wir μ die Bedeutung in §. 28 beilegen:

1) $(b_1\, b_2)$ & $(e_1\, e_2)$ sind gleichgerichtet.

(G)	Bezeichn. v. $(l_1\, l_2)$.	$l_1\quad l_2$	Nothw. u. hinr. Bedingung.
(I)	$b_1(e_1{}_{x_1\, x_2\, x_3}\, e_2)\, b_2$	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$\mu < 0;\ \varepsilon > 0;\ \frac{\gamma}{\varepsilon} < a$
„	$b_1(e_1{}_{x_1\, x_2}\, b_2)\, e_2$	$\frac{\gamma}{\beta}\quad a$	„ ; „ ; $\frac{\gamma}{\beta} < a < \frac{\gamma}{\varepsilon}$
„	„	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\delta_{,}$	„ ; $\varepsilon < 0;\ \frac{\gamma}{\beta} < \delta_{,}$
(II)	„	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\quad\delta_{,,}$	„ ; „ ; $a < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \delta_{,,}$
(III)	„	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\delta_{,,}$	„ ; $\frac{\gamma}{\beta} < \delta_{,,}$
(IV)	„	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\ \alpha$ oder $\frac{\gamma}{\beta}\ \delta_{,,}$	„ ; $a < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \alpha < \frac{\gamma}{\beta} < \delta_{,,}$
„	„	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\quad\alpha$	„ ; $a < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \alpha < \delta_{,,} < \frac{\gamma}{\beta}$
„	„	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\delta_{,,}$	„ ; $\alpha < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \frac{\gamma}{\beta} < \delta_{,,}$
(II)	$e_1(b_1{}_{x}\, b_2)\, e_2$	$a\quad\delta_{,,}$	$\varepsilon < 0,\ \frac{\gamma}{\varepsilon} < a$
(IV)	„	$\alpha\quad\delta_{,,}$	$\frac{\gamma}{\beta} < \alpha$
„	„	$a\quad\alpha$	$\frac{\gamma}{\varepsilon} < a,\ \alpha < \frac{\gamma}{\beta}$
(I)	$b_1(e_1{}_{x}\, e_2)\, b_2$	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$\mu > 0,\ \varepsilon > 0,\ \frac{\gamma}{\varepsilon} < a$
(IV)	„	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\quad\frac{\gamma}{\beta}$	$a < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \frac{\gamma}{\beta} < \alpha$

2) $(b_1\, b_2)$ & $(e_1\, e_2)$ sind entgegengesetzt gerichtet.

(G)	Bezeichn. v. $(l_1\, l_2)$.	$l_1\quad l_2$	Nothw. u. hinr. Bedingung.
(I)	$e_2(b_1{}_{x}\, e_1)\, b_2$	$a\quad\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$\varepsilon > 0,\ \frac{\gamma}{\beta} < a < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \alpha$
„	„	$\alpha\quad\frac{\gamma}{\beta}$	$\alpha < \frac{\gamma}{\beta}$
„	$b_1(e_2{}_{x}\, e_1)\, b_2$	$\frac{\gamma}{\beta}\quad\frac{\gamma}{\varepsilon}$	$\varepsilon > 0,\ a < \frac{\gamma}{\beta} < \frac{\gamma}{\varepsilon} < \alpha$
(II)	„	$\frac{\gamma}{\beta}\quad 0$	
(IV)	„	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\quad\frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\beta} < a$
(I)	$e_2(b_1{}_{x}\, b_2)\, e_1$	$a\quad\alpha$	$\varepsilon > 0,\ \frac{\gamma}{\beta} < a;\ \alpha < \frac{\gamma}{\varepsilon}$
„	„	$\delta_{,,}\quad\alpha$	$\varepsilon < 0,\ \frac{\gamma}{\beta} < \delta_{,,}$

(G)	Bezeichn. v. $(l_1\, l_2)$.	$l_1\; l_2$	Nothw. u. hinr. Bedingung.
(II)	$e_2\,(b_1 \times b_2)\,e_1$	$\delta,\; a$	$\varepsilon < 0,\; \frac{\gamma}{\varepsilon} < \delta,$
(III)	"	$\infty\; \delta,$	
(IV)	"	"	
(I)	$b_1\,(e_2 \times b_2)\,e_1$	$\frac{\gamma}{\beta}\; \alpha$	$\varepsilon > 0,\; a < \frac{\gamma}{\beta} < \alpha < \frac{\gamma}{\varepsilon}$
"	"	"	$\varepsilon < 0,\; \delta_{,,} < \frac{\gamma}{\beta} < \alpha$
(II)	"	$\frac{\gamma}{\varepsilon}\; a$	$\varepsilon < 0,\; \delta_{,} < \frac{\gamma}{\varepsilon} < a$
(IV)	"	"	$\frac{\gamma}{\varepsilon} < a < \frac{\gamma}{\beta}$

§. 26.

Darstellung der Wurzeln von (G) durch Kettenbrüche.

Bezeichnen wir mit z_1, z_2 .... beliebige Grössen in den, durch die Wurzeln der Gleichung (G) gebildeten, Partialintervallen von $(l_1\, l_2)$, so dass:

$$l_1 < z_1 < x_1 < z_2 < x_2 \ldots x_n < z_{n+1} < l_2 \quad ,$$

so können wir uns jeder der reellen Wurzeln x von (G) sowohl auf der negativen als positiven Seite mittelst eines und nur eines der Kettenbrüche:

$$\overset{\pm}{B}{}_z^{\,m} = a \pm \sqrt{\left(-\varepsilon - \cfrac{\gamma_m}{a \pm \sqrt{\left(-\varepsilon + \cfrac{\gamma_{m-1}}{\ddots}\right)}}\right)}$$

$$\cdots\; a \pm \sqrt{\left(-\varepsilon + \cfrac{\gamma_2}{a \pm \sqrt{\left(-\varepsilon + \cfrac{\gamma_1}{z}\right)}}\right)}$$

und:

$$E_z^{\,m} = \cfrac{\gamma_m}{\varphi\left(\cfrac{\gamma_{m-1}}{\varphi\left(\cfrac{\gamma_{m-2}}{\ddots\; \varphi\left(\cfrac{\gamma_2}{\varphi\left(\cfrac{\gamma_1}{\varphi(z)}\right)}\right)}\right)}\right)}$$

wo: $a = \frac{\alpha}{2}$, $\varepsilon = \beta - a^2$, $\varphi(b) = b^2 - \alpha b + \beta$, $\gamma_r = \gamma$

und z einem der an x grenzenden Intervalle zugehört, bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit annähern, wenn wir nur m hinlänglich gross nehmen.

Sind die, x enthaltenden Intervalle $(b_1\ b_2)$ und $(e_1\ e_2)$ [§. 25], gleich gerichtet und liegt z in dem x vorangehenden, folgenden Partialintervalle, so nähert man sich x beständig auf der negativen, positiven Seite.

Sind $(b_1\ b_2)$ und $(e_1\ e_2)$ entgegengesetzt, so findet die Annäherung an x abwechselnd auf der $\begin{pmatrix}\text{positiven, negativen}\\ \text{negativen, positiven}\end{pmatrix}$ Seite statt, wenn z eine $\begin{pmatrix}\text{untere}\\ \text{obere}\end{pmatrix}$ Grenze von x ist.

Bezeichnet ${}^{\cdot}x$, $x^{\cdot}$ eine, der Wurzel x auf der negativen, positiven Seite unendlich benachbarte Grösse, m und n eine unendlich grosse Zahl, so ergeben sich für x folgende Darstellungen:

1. $(b_1\ b_2)$ & $(e_1\ e_2)$ sind gleich gerichtet.

$(l_1\ l_2)$	Untere und obere Grenzen der Wurzeln in $(l_1\ l_2)$.
$b_1(e_1\ {}_{x_1}\ {}_{x_2}\ {}_{x_3}\ e_2)b_2$	${}^{\cdot}x_1 = \overset{m}{E}_{z_1}$, $x_1^{\cdot} = \overset{m}{E}_{z_2}$; ${}^{\cdot}x_2 = \overset{-m}{B}_{z_2}$, $x_2^{\cdot} = \overset{-m}{B}_{z_3}$; ${}^{\cdot}x_3 = \overset{m}{E}_{z_3}$, $x_3^{\cdot} = \overset{m}{E}_{z_4}$.
$b_1(e_1\ {}_{x_1}\ {}_{x_2}\ b_2)e_2$	${}^{\cdot}x_1 = \overset{m}{E}_{z_1}$, $x_1^{\cdot} = \overset{m}{E}_{z_2}$; ${}^{\cdot}x_2 = \overset{\pm m}{B}_{z_2}$, $x_2^{\cdot} = \overset{\pm m}{B}_{z_3}$.
$e_1(b_1\ {}_{x}\ b_2)e_2$	${}^{\cdot}x = \overset{+m}{B}_{z_1}$, $x^{\cdot} = \overset{+m}{B}_{z_2}$
$b_1(e_1\ {}_{x}\ e_2)b_2$	${}^{\cdot}x = \overset{m}{E}_{z_1}$, $x^{\cdot} = \overset{m}{E}_{z_2}$

2. $(b_1\ b_2)$ & $(e_1\ e_2)$ sind entgegengezetzt gerichtet:

Nothw. u. hinr. Bedingung.	Untere Grenze: ${}^{\cdot}x$.	Obere Grenze: $x^{\cdot}$.
$\overset{1}{B}_{l_1}\quad z_1\quad \overset{2}{E}_{z_1}$	. . $\overset{2n}{E}_{z_1}$ . .	$\overset{2n-1}{E}_{z_1}$
$\overset{1}{E}_{l_1}\quad z_1 < \overset{2}{B}_{z_1}$	. . $\overset{2n}{B}_{z_1}$ . .	$\overset{2n-1}{B}_{z_1}$
$\overset{2}{E}_{z_2} < z_2 < \overset{1}{B}_{l_1}$	. . $\overset{2n-1}{E}_{z_2}$ . .	$\overset{2n}{E}_{z_2}$
$\overset{2}{B}_{z_2} < z_2 < \overset{1}{E}_{l_1}$	. . $\overset{2n-1}{B}_{z_2}$ . .	$\overset{2n}{B}_{z_2}$

Findet ad 2. die $\begin{pmatrix}1.\\ 3.\end{pmatrix}$ Bedingung nicht statt, so die $\begin{pmatrix}2.\\ 4.\end{pmatrix}$ und umgekehrt.

§. 27.
Näherungsprincip.

I. Voraussetzungen:

1) Seien $(u_1\ u_2)$ und $(v_1\ v_2)$ zwei beliebige Intervalle zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ mit dem gemeinschaftlichen Intervall $(l_1\ l_2)$.
2) Jedem u in $(u_1\ u_2)$ entspreche ein und Ein v in $(v_1\ v_2)$ und umgekehrt.
3) Jede $\binom{\text{Zu-}}{\text{Ab-}}$nahme von u, v in jenem Intervall habe entweder eine Zu- oder eine Abnahme von v, u im Gefolge.
4) Wenn $(u_1\ u_2)$ und $(v_1\ v_2)$ entgegengesetzt sind, so möge es wenigstens Ein Paar zusammengehöriger Werthe: u_r, v_r geben, sodass mit $v_s = u_r$ nicht $u_s = v_r$ ist.
5) x_1, x_2 ... seien solche Grössen, in denen zwei sich entsprechende Werthe von u und v zusammenfallen.
6) z_1, z_2 ... beliebige Grössen in den successiven von x_1, x_2 .. gebildeten Partialintervallen von $(l_1\ l_2)$, sodass:
$$l_1 < z_1 < x_1 < z_2 < x_2 \ldots z_n < x_n < z_{n+1} < l_2$$
7) Die Abhängigkeit von u und v sei ausgedrückt durch jedes der Symbole:
$$f(u, v) = 0, \quad u = X(v) \quad \& \quad v = Z(u).$$

II. Unter den obigen Bedingungen lässt sich jede in $(l_1\ l_2)$ enthaltene Wurzel x_r der Gleichung:
$$F(x) = f(x, x) = 0$$
durch eine und nur durch Eine der Functionen:
$$U_z^m = X^1\left[X^2 \ldots X^m(z)\right] \quad \text{und:}$$
$$V_z^m = Z^1\left[Z^2 \ldots Z^m(z)\right]$$
darstellen, wo m eine unendlich grosse Zahl bedeutet:

1. $(u_1\ u_2)$ u. $(v_1\ v_2)$ sind gleichgerichtet.

Bezeichnung von $(l_1\ l_2)$	Untere u. obere Grenzen der Wurzeln.
$v_1\ (u_1\ x_1\ x_2\ ..\ x_{2k}\ v_2)\ u_2$	${}^{\cdot}x_1 = U^m_{z_1}$, $x_1{}^{\cdot} = U^m_{z_2}$; ${}^{\cdot}x_2 = V^m_{z_2}$, $x_2{}^{\cdot} = V^m_{z_3}$ ect.
$v_1\ (u_1\ x_1\ x_2\ ..\ x_{2k+1}\ u_2)\ v_2$	" " " " "
$u_1\ (v_1\ x_1\ x_2\ ..\ x_{2k+1}\ v_2)\ u_2$	${}^{\cdot}x_1 = V^m_{z_1}$, $x_1{}^{\cdot} = V^m_{z_2}$; ${}^{\cdot}x_2 = U^m_{z_2}$, $x_2{}^{\cdot} = U^m_{z_3}$ "
$u_1\ (v_1\ x_1\ x_2\ ..\ x_{2k}\ u_2)\ v_2$	" " " " "

2. $(b_1\, b_2)$ und $(e_1\, e_2)$ sind entgegengesetzt gerichtet: Die Darstellung der Wurzel in $(l_1\, l_2)$ durch Kettenbrüche ist analog der in §. 26 2). — Dass sich x nur auf Eine der in §. 26 angegebenen Arten ausdrücken lässt, zeigen folgende

Schemata zur Darstellung von x:

$(l_1\, l_2)$	$x = \overset{m}{V_z}$	$x = \overset{m}{U_z}$
$v_2\,(u_1 \underset{x}{} v_1)\,u_2$	v_2 u_1 Z_1 x v_1 u_2 u_3 v_3 v_4 u_4 u_5 v_5 v_6 u_6	v_2 u_1 Z_1 x v_1 u_2 (u_3) (v_3) (v_4) od. (v_4) (u_4) v_3 u_3 u_4 v_4
	v_2 u_1 x Z_2 v_1 u_2 v_3 u_3 u_4 v_4 v_5 u_5 u_6 v_6	v_2 u_1 x Z_2 v_1 u_2 (v_3) od. (v_3) (u_3) (u_4) (v_4) u_3 v_3 v_4 u_4
$v_2\,(u_1 \underset{x}{} u_2)\,v_1$	v_2 u_1 Z_1 x u_2 v_1 (v_3) (u_3) (u_3) od. (u_4) (v_4) u_3 v_3 v_4 u_4	v_2 u_1 Z_1 x u_2 v_1 v_3 u_3 u_4 v_4 v_5 u_5 u_6 v_6
	v_2 u_1 x Z_2 u_2 v_1 (u_3) (v_3) (v_4) (u_4) v_3 u_3 u_4 v_4	v_2 u x Z_2 u_2 v_1 u_3 v_3 v_4 u_4 u_5 v_5 v_6 u_6

§. 28.

Trennung der reellen Wurzeln von (G).

Die Annäherung an die Wurzeln von:

$$F(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \quad \ldots \text{(G)}$$

mittelst des Princips in §. 27 (Vergl. §. 24 bis §. 26) erfordert

1) Die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln*).
2) Für den Fall dreier reeller Wurzeln die Trennung**) derselben, d. h. die Aufsuchung von Grössen, welche in den von jenen gebildeten Intervallen liegen.

ad 1): Die Gleichung $F(x) = 0$ hat $\binom{1}{3}$ reelle Wurzeln,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{wenn} & \mu = v^2 - 4\lambda^3 \gtrless 0, \\ \text{wo} & \lambda = \alpha^2 - 3\beta \qquad \text{und:} \\ & v = 2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 2\alpha\lambda - 3(\alpha\beta - 9\gamma). \end{array}\right\} \quad (1)$$

---

*) Die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

ist nach Borchardt gleich der Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Determinanten:

$$s_0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

wo allgemein: $s_r = \Sigma(x^r)$, $s_r + A_1 s_{r-1} + \ldots A_{r-1} s_1 + r A_r = 0$ und $A_{n+m} = 0$.

**) Zur Trennung der Wurzeln einer Gleichung des n^{ten} Grades haben wir ausser dem Fourier'schen Theorem (Note zu §. 13) den Lehrsatz von Sturm:

Ist: $X = x^n - \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} \ldots (-1)^{n-1} \alpha_1 x + (-1)^n \alpha_0$,

$X_1 = n x^{n-1} - (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + (n-2)\alpha_{n-2} x^{n-3} \ldots (-1)^{n-1} \alpha_1$;

sind ferner: $X_2, X_3 \ldots X_n$

die negativen Werthe der ersten Reste, die sich bei Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses von:

$$X \text{ und } X_1;\ X_1 \text{ und } X_2 \ldots X_{n-2} \text{ und } X_{n-1}$$

ergeben, so hat die Gleichung: $X = 0$ in einem beliebigen Intervall $(q_1 q_2)$ so viele reelle Wurzeln als beim Uebergang von q_1 nach q_2 in der Reihe:

$$X, X_1, X_2 \ldots X_n$$

Zeichenwechsel verloren gehen.

(Für die Gleichung: $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ ist:

$$X_2 = 2\lambda x - (\alpha\beta - 9\gamma) \quad \text{und} \quad X_3 = -\frac{\mu}{3} \qquad \text{[§. 28. (1)].)}$$

Bemerkenswerth sind folgende Ausdrücke für μ:

$$\frac{\mu}{9} = (\alpha\beta - 9\gamma)^2 + 4(\alpha^2 - 3\beta)(3\alpha\gamma - \beta^2),$$

$$\frac{2}{27}\mu = (2\alpha^2 - 9\beta)(4\alpha\gamma - \beta^2) + (54\gamma^2 - \beta^3),$$

$$= (2\beta^2 - 9\alpha\gamma)(4\beta - \alpha^2) + \gamma(54\gamma - \alpha^3).$$

ad 2): Zu den Werthen:

$$\rho_0 = \frac{\alpha}{3}, \quad \begin{pmatrix}\rho' \\ \rho_,\end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{3}, \quad \begin{pmatrix}\rho'' \\ \rho_{,,}\end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix}\rho''' \\ \rho_{,,,}\end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \pm 2\,\frac{\sqrt{\lambda}}{3} \quad \text{ist}$$

die Lage der Wurzeln folgende: (2)

Bedingungen.	∞		$\rho_{,,,}$		$\rho_{,,}$		$\rho_,$		ρ_0		ρ'		ρ''		ρ'''		∞
$\lambda > 0, \mu < 0, v < 0$				x_1						x_2		x_3					
» » $, v > 0$						x_1		x_2						x_3			
» $\mu > 0, v < 0$		x															
» » $, v > 0$																x	

Ist $\lambda < 0$, so sind zwei Wurzeln imaginär; die reelle Wurzel ist: $x \lesseqqgtr \rho_0$ je nachdem $v \lesseqqgtr 0$.

Die Kriterien (1) und (2) lassen sich leicht mit Hülfe des Fourier'schen Satzes nachweisen, wenn wir beachten dass:

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{\alpha}{3} \mp \frac{\sqrt{k}}{3}\right) &= -\frac{v}{27} \mp \frac{1}{27}(k - 3\lambda)\sqrt{k}, \\ F'(\quad » \quad) &= \frac{k - \lambda}{3} \qquad \text{und:} \\ F''(\quad » \quad) &= \mp \sqrt{k} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(Vergl. die Note zu §. 13).

Zu den sich auf $\mu < 0$ beziehenden Kriterien in (2) werden wir geführt durch die Construction der Wurzelausdrücke:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha}{3} + \varrho \cos\left(120^0 \pm \frac{\tau}{3}\right) \quad \text{und:}$$

$$x_3 = \frac{\alpha}{3} + \varrho \cos\frac{\tau}{3},$$

wo: $\varrho = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}$, $\cos\tau = \frac{v}{3\lambda\varrho}$ und $\tau < 180^0$;

indem wir $\frac{\alpha}{3}$ als Abscisse construiren, aus dem Endpunkte derselben mit ϱ als Radius über der X Achse einen Halbkreis beschreiben, den Bogen τ, für den $\cos\tau = \frac{v}{3\lambda\varrho}$ ist, in drei gleiche Theile theilen, die Bögen:

$$120^0 + \frac{\tau}{3},\ 120^0 - \frac{\tau}{3},\ \&\ \frac{\tau}{3},$$

sowie die Projectionen ihrer Endpunkte bestimmen, deren Abscissen die verlangten Wurzeln und zwar bezüglich $x_1 , < x_2 <, x_3$ sind.

Bezeichnen wir nämlich von der Linken zur Rechten die um 30^0 abstehenden Punkte des Halbkreises mit:

$$p_{,,,},\ p_{,,},\ p_{,},\ p_0,\ p',\ p'',\ p''',$$

so liegen jene Endpunkte:

1) wenn $\tau > 90^0$, bezüglich in $(p_{,,,}\,p_{,,})$, $(p_0\,p')$ und $(p'\,p'')$,

2) „ „ $<$ „ „ „ $(p_{,,}\,p_{,})$, $(p_{,}\,p_0)$ „ $(p''\,p''')$,

die Wurzelpunkte also in den Projectionen dieser Kreisintervalle.

§. 29.

Zurückführung von (G) auf die Form:

$$n\,(n - 3)^2 = \eta\ .\ .\ .\ .\ (N)$$

Aus der ersten Relation in §. 28. (3) folgt, dass sich die Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - \alpha\,x^2 + \beta\,x - \gamma = 0\ .\ .\ .\ .\ (G)$$

mittelst der von

$$\left.\begin{aligned} n\,(n - 3)^2 &= \eta, \quad \text{oder:} \\ n^3 - 6\,n^2 + 9\,n - \eta &= 0, \\ \text{wo:}\quad \eta &= \frac{v^2}{\lambda^3}, \end{aligned}\right\}\ (N)$$

und zwar durch:

$$x = \frac{\alpha}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\lambda\,n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

ausdrücken lassen, wenn λ, μ und γ die Bedeutung in §. 28. (1) haben.

Die reellen Wurzeln von (N, sind nach §. 26 durch folgende Kettenbrüche darstellbar:

$$E^m_z = \cfrac{\eta_m}{\left[\cfrac{\eta_{m-1}}{\ddots\, \left[\cfrac{\eta_2}{\left[\cfrac{\eta_1}{(z-3)^2} - 3\right]^2} - 3\right]^2} - 3\right]^2} \quad \text{u.} \quad \overset{\pm}{B}{}^m_z = 3 \pm \sqrt{\cfrac{\eta_m}{3 \pm \sqrt{\cfrac{\eta_{m-1}}{\ddots\, 3 \pm \sqrt{\cfrac{\eta_2}{3 \pm \sqrt{\cfrac{\eta_1}{z}}}}}}}},$$

wo allgemein $\eta_r = \frac{v^2}{\lambda^3}$.

Gemäss §. 28. (2) ergeben sich wie folgt

die reellen Wurzeln von (G):

Bedingungen.	Wurzelausdrücke . . . . (2)
$\lambda > 0$, $u < 0$, $v < 0$	$x_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{n}$, wo $3 < n < 4$
	$x_2 =$ » $+$ » » » $0 < n < 1$
	$x_3 =$ » $+$ » » » $1 < n < 3$
» » $v > 0$	$x_1 =$ » $-$ » » » » » »
	$x_2 =$ » $-$ » » » $0 < n < 1$
	$x_3 =$ » $+$ » » » $3 < n < 4$
» $u > 0$, $v < 0$	$x =$ » $-$ » » » $4 < n < \infty$
» » $v > 0$	$x =$ » $+$ » » » » » »
$\lambda < 0$, $(u < 0)$, $v < 0$	$x = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{-\lambda} \cdot \sqrt{-n}$ » $\infty < n < 0$
» (»), $v > 0$	$x =$ » $+$ » » » » » »

wo:
$$n(n-3)^2 = \frac{v^2}{\lambda^3} = \eta \quad . . . . (3)^{*)}$$

Diese Formeln eigenen sich zu einer Ueberschlagsrechnung, indem man n leicht durch Probiren angenähert bestimmen kann, bei Anwendung der Kriterien der Abschnitte: E und F oder der Kettenbrüche in G.

Auf obige Darstellung lässt sich auch eine logarithmetische Berechnung der reellen Wurzeln der cubischen Gleichungen (G) gründen, welche vor der bisherigen den Vorzug verdienen möchte, und zwar mit Hülfe einer Tabelle für: log (n) und log $[n(n-3)^2]$, sowie der Formeln:

$$x = \frac{\alpha}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{num} \log \left(\frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1}{2} \log n\right) \qquad \text{und:}$$
$$\log \eta = 2 \log (\pm v) - 3 \log \lambda,$$

wenn $\lambda > 0$, oder:

$$x = \frac{\alpha}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{num} \log \left(\frac{1}{2} \log(-\lambda) + \frac{1}{2} \log(-n)\right) \qquad \text{und:}$$
$$\log(-\eta) = 2 \log(\pm v) - 3 \log(-\lambda),$$

wenn $\lambda < 0$ ist.

---

*) H. F. Kertz, Major . . . in Darmstadt, hat in Grunert's Archiv für Mathematik und Phys. Th. 42 und 44, in seiner Abhandlung: „Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung" (Th. 41, 42 und 44) eine Tabelle für $\eta = n^3 - 6n^2 + 9n$ berechnet.

§. 30.

Construction der Wurzeln der Gleichung (G).

Zur näherungsweisen Bestimmung der reellen Wurzeln von (G) [§. 20], wie überhaupt einer algebraischen Gleichung, besitzen wir mehr oder weniger brauchbare Hülfsmittel in den Methoden zu ihrer Construction*).

---

*) Dem arabischen Mathematiker Omar Alkhayyâmî (Vergl. die Anmerkung zu §. 1 sowie die Abhandlung von Dr. F. Woepcke: „Notice sur un manuscrit arabe....“ in Crelle's Journal, Bd. 40) gebührt das Verdienst, zuerst in systematischer Weise die cubischen Gleichungen geometrisch gelöst zu haben. Seine Constructionen der (positiven) „Wurzeln“ mit Hülfe von Kegelschnitten, wenngleich von geringem practischem Werthe, machen dem Verfasser alle Ehre. — Ein besonderes Interesse gewähren die geometrischen Kriterien in Betreff der Anzahl der „Wurzeln“.

[Mehrere Jahrhunderte später (1545) veröffentlichte Cardan in seiner Ars magna die nach ihm benannte Formel zur algebraischen Auflösung der cubischen Gleichungen, welche zuerst Scipio Ferreo (1505), später Tartalea entdeckt hatte.]

Von den späteren Constructionsmethoden ist die Centralregel des Cartesius (Descartes) hervor zu heben, welche, in der Durchschnittsbestimmung einer beliebigen Parabel mit einem Kreise bestehend, die reellen Wurzeln der allgemeinen biquadratischen, mithin auch cubischen Gleichung liefert.

Descartes hat auch für die Gleichungen des sechsten Grades eine geometrische Auflösung gegeben, welche die Verzeichnung einer parabolischen Conchoide erfordert und zwar den Durchschnitt eines Strahlenbüschels mit einer Schaar congruenter Parabeln, deren Achsen einstimmig zusammen fallen, welche beiden Büschel in der Art zugeordnet sind, dass ein Strahl die Achse X′X in einem Punkte trifft, der von dem Scheitel der entsprechenden Parabel innerhalb derselben den (positiven) Abstand c hat. Die Gleichung jener Curve in Bezug auf X′X als Abscissenachse, die durch den Büschelpunkt B zu ihr Senkrechte als Ordinatenachse ist:

$$y^3 - b\,y^2 - p\,c\,y + b\,c\,p = p\,y\,x, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo b die Ordinate von B bezeichnet.

Die Ordinaten der Durchschnitte dieser Conchoide mit einem durch:

$$(x - f)^2 + (y - g)^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dargestellten Kreise sind die Wurzeln der Gleichung:

$$y^6 - 2\alpha y^5 + \beta y^4 - 2\gamma y^3 + \delta y^2 - 2\varepsilon y + \lambda = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

wenn:

$$\left.\begin{array}{l} b = \alpha,\ p^2 = \beta - \alpha^2 + \dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}},\ c = \dfrac{1}{\alpha p}\sqrt{\lambda},\ f = \dfrac{\alpha\varepsilon - \lambda}{\lambda}\,c, \\ g = \left(\gamma - \dfrac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\right)\dfrac{1}{p^2},\ r^2 = g^2 + \left(\dfrac{\varepsilon^2}{\lambda} - 2\alpha\sqrt{\lambda} - \delta\right)\dfrac{1}{p^2}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Damit p reell ausfalle, und von der Conchoide nur Punkte auf der positiven Seite von X′X zu construiren sind, führen wir mit Descartes die beliebig vorgelegte Gleichung des sechsten Grades auf eine Form (3) zurück, deren Coefficienten abwechselnd positiv und negativ sind und in der $\beta > \alpha^2$ ist. (Vergl. „die Aufl. d. Gl. des 5. u. 6. Grades durch Construction nach Descartes ... von Grunert“ im XXVII. Theil seines Journals der Math. u. Phys.)

Vor den bekannten Methoden zur Construction der Wurzeln einer cubischen Gleichung möchte die sich aus §. 4 und §. 20 3) und 5) ergebende in so fern den Vorzug verdienen, als sich bei Anwendung der Kriterien in E (Vergl. Abschnitt F.) die Anzahl der zu construirenden Curvenpunkte auf ein Minimum reduciren lässt.

Jene Kriterien möchten zugleich die Construction mittelst der Curve, deren Gleichung in Bezug auf rechtwinkelige Coordinaten: $F(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$
ist, zu einer praktisch brauchbaren machen, zumal die den Grössen b, c . . (§. 20) entsprechenden Functionswerthe (§. 13):

$$F(b),\ F(c)\ .\ .\ .\ F(g_{\prime}),\ F(g_{\prime\prime})$$

sich einfach durch dieselben ausdrücken.

Für ein beliebiges q ist:

$$F(q) = F_1(q) + F_2(q),$$

wo die einzelnen Bestandtheile (§. 21):

$$F_1(q) = q(q - b)(q - c) \quad \text{und:}$$
$$F_2(q) = b(c - d)(q - e)$$

sich leicht logarithmisch berechnen lassen.

Die in Vorliegendem abgeleiteten Resultate möchten, wenn es sich um die Berechnung der reellen Wurzeln einer cubischen Gleichung handelt, auf Kosten ihrer Selbständigkeit, am zweckmässigsten zu einer Ueberschlags- oder Proberechnung dienen.

Dieselben lassen sich auch für die biquadratischen Gleichungen nutzbar machen. Wir bemerken hierzu:

Ist: $$F(x) = x^4 - A x^3 + B x^2 - C x + D = 0 \ldots\ldots (1)$$
eine beliebig vorgelegte Gleichung des vierten Grades und setzen wir:

$$\alpha = \frac{3}{4} A, \ \beta = \frac{1}{2} B, \ \gamma = \frac{1}{4} C \quad \text{und} \quad \delta = D, \ . (2)$$

so stimmen die Coefficienten von x^3, x^2 und x^1 in derjenigen Gleichung, deren Wurzeln um eine beliebige Grösse q kleiner sind, als die von (1), abgesehen von dem Factor 4, mit denen von x^2, x^1, x^0 in der aus

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

durch Transformation nach q gebildeten Gleichung überein (§. 13). Das von x freie Glied:

$$F(q) = q^4 - \frac{4}{3} \alpha q^3 + 2 \beta q^2 - 4 \gamma q + \delta$$

können wir auf die Form:

$$F(q) = q^2 (q - h)(q - k) + P (q - l)(q - m)$$

bringen, wo:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{4 \gamma l - \delta}{l^2} = h^2 - \frac{4}{3} \alpha h + 2 \beta, \\
h &= \frac{2}{3} \alpha \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2 \alpha}{3}\right)^2 - 2 \beta + P\right)}, \\
k &= \frac{4}{3} \alpha - h, \\
l &= \frac{2 \gamma \pm \sqrt{(4 \gamma^2 - \delta P)}}{P} \qquad \text{und:} \\
m &= \frac{4 \gamma}{P} - l.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Da F (q) als die erste Derivirte eines beliebigen Polynoms des fünften Grades angesehen werden kann, dieses sich auf eine ähnliche Form bringen lässt und zugleich die erste Derivirte eines allgemeinen Polynoms des sechsten Grades ist u. s. f., so möchten auch die Gleichungen vom fünften und höherer Grade in analoger Weise zu behandeln sein; ob die Zweckmässigkeit aber nicht bereits beim dritten Grade aufhört, müssen wir dahin gestellt sein lassen.

Druckfehler.

S. 11. 3. Z. v. u. lies $(\overline{O})$, $(\overline{B})$, $(\overline{E})$.

S. 32. 2. u. 1. Z. v. u. lies $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ u. $\frac{\sqrt{\lambda}}{3}$.

S. 44. 6. Z. v. o. statt: und Ein lies: und nur Ein.

S. 48. In dem 3. Wurzelzeichen v. u. lies η_{m-1}.

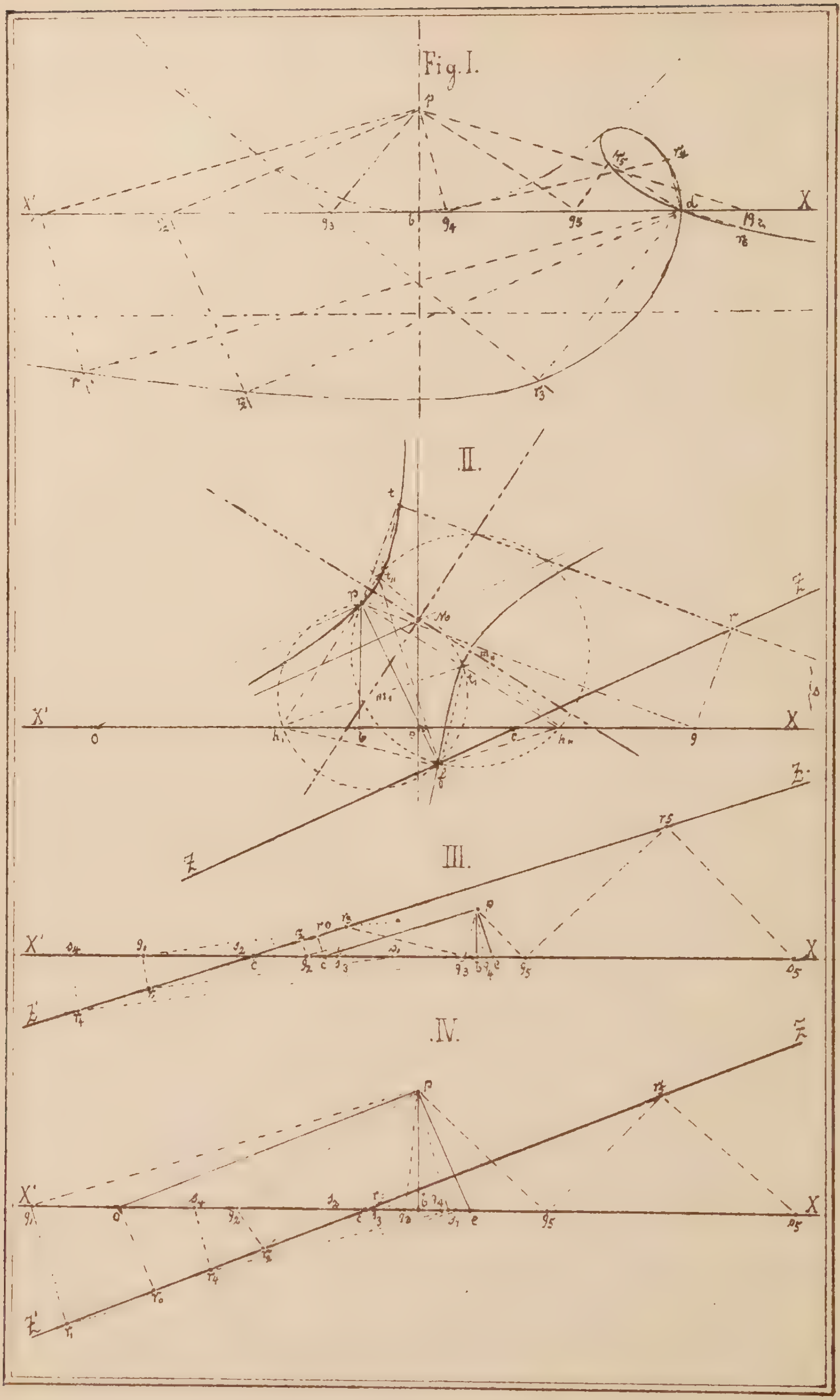
Fig. I.
II.
III.
IV.

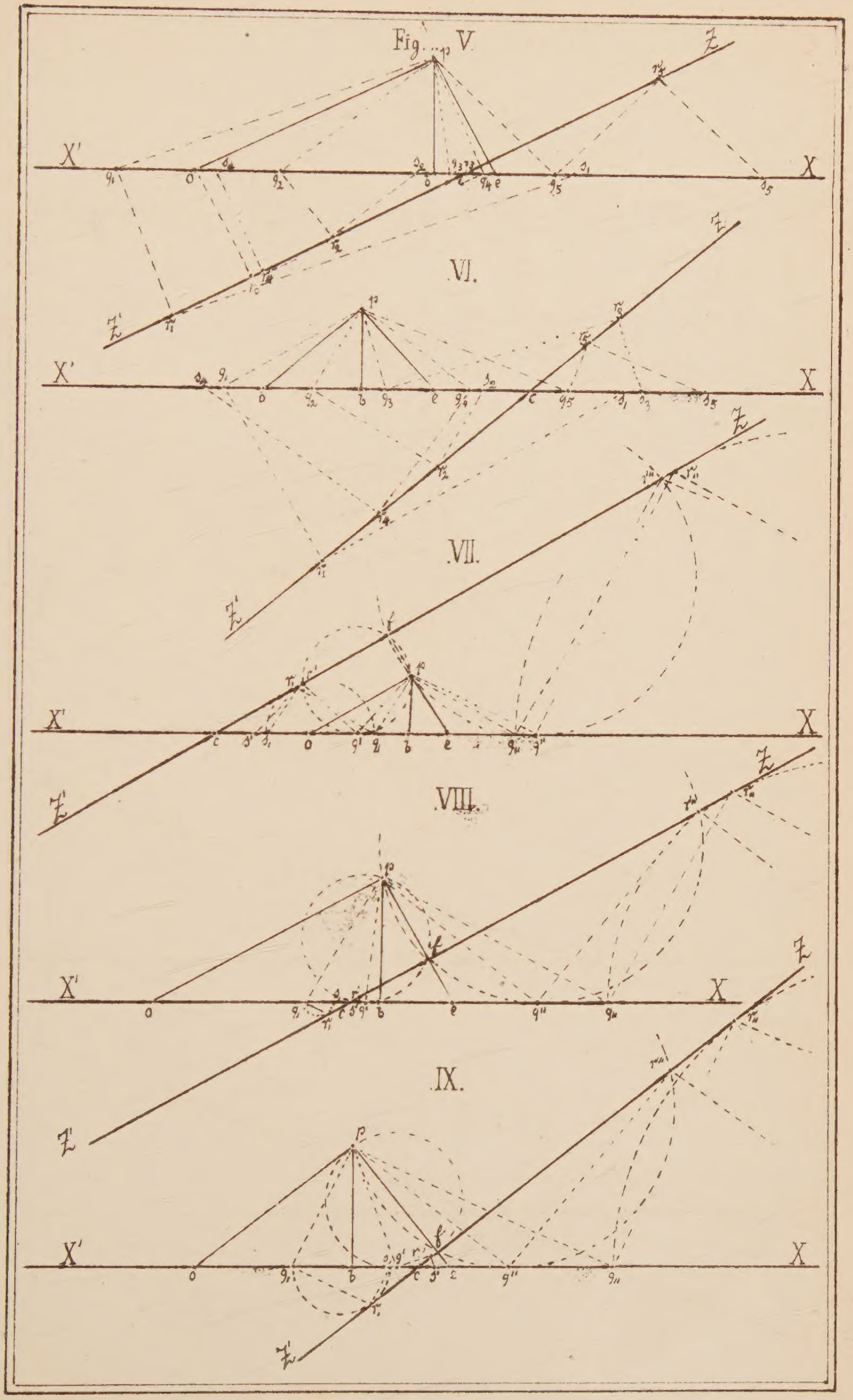
Fig. V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X'
X
Z
Z'